Revista de Economía Aplicada E A *Número 26 (vol. IX), 2001, págs. 57 a 93*

MODELOS DE INMUNIZACIÓN DE CARTERAS DE RENTA FIJA*

GLORIA M. SOTO PACHECO
Universidad de Murcia

El objetivo de este trabajo es, en primer lugar, esclarecer la multitud de modelos que se engloban bajo el análisis de duración y sus implicaciones en la inmunización de carteras de renta fija. Con este fin, tras plantear la técnica de la inmunización y el modelo tradicional de duración y sus limitaciones, se analizan los distintos modelos de duración que se han planteado en las últimas dos décadas mostrando las restricciones que cada modelo implica. En segundo lugar, se examina la evidencia empírica más relevante en el campo de los modelos de duración desde una visión crítica, ya que, por una parte, en la literatura empírica sobre inmunización habitualmente se han impuesto restricciones sobre las carteras simuladas que favorecen a ciertos modelos y, por otra parte, subsisten cuestiones sin resolver.

Palabras clave: inmunización, duración, tipos de interés, gestión de riesgos, renta fija.

Clasificación JEL: E43, G11.

La década de los setenta constituyó el punto de partida de un creciente interés en relación con los efectos, implicaciones y posibilidades de gestión del riesgo derivado de las fluctuaciones de los tipos de interés. Consecuentemente, la renta fija y los tipos de interés, que hasta entonces habían sido objeto de escasa atención, empezaron a protagonizar una parte importante de la investigación financiera realizada tanto en ámbitos profesionales como académicos, recuperándose, en algunos casos, desarrollos bastante anteriores en el tiempo. Éste fue el caso de la duración, una medida del grado de exposición al riesgo de interés de un activo o cartera de renta fija, cuyo origen se encuentra 1938.

A pesar de las fuertes limitaciones del análisis de duración tradicional, que engloba los conceptos de duración y convexidad, éste sigue siendo considerado un instrumento básico en la inmunización de carteras debido, básicamente, a tres razones: (i) por el hecho de que gran parte de los planteamientos alternativos han sustituido los supuestos en que se basa la duración por otros igualmente aprioristi-

(*) Deseo agradecer el apoyo prestado por María Asunción Prats y José Alberto de Luca y los comentarios y sugerencias de dos evaluadores anónimos que han contribuido a mejorar la estructura de este trabajo. Agradezco también la financiación de la Fundación Caja de Madrid.

cos; (ii) porque la evidencia empírica tradicionalmente ha venido mostrando, no sin la inclusión de supuestos muy restrictivos en sus simulaciones, unos resultados muy alentadores a favor de los modelos de duración más simples; (iii) por el elevado grado de simplicidad que caracteriza al análisis de duración tradicional. No obstante, a lo largo de este último cuarto de siglo, y con un estímulo renovado en la última década, han ido surgiendo muy diversos planteamientos alternativos del modelo de duración.

Por todo ello, el objetivo de este trabajo es, por una parte, sintetizar algunos de los modelos más rememorados y las más recientes extensiones de los modelos de duración y, por otra, manifestar en qué factores radica el éxito que frecuentemente ha mostrado el modelo tradicional en la investigación empírica, así como mostrar el estado de la investigación en torno a los más recientes planteamientos y sus principales debilidades.

Con tales objetivos, hemos estructurado nuestro trabajo en cuatro secciones. En la primera de ellas partiremos de conceptos básicos de valoración de activos para definir la técnica de la inmunización en su concepción clásica y mostrar las grandes restricciones que habitan en el modelo de duración tradicional. En la segunda sección realizaremos un somero recorrido por las numerosas redefiniciones del modelo de duración que se han planteado en las últimas dos décadas tanto desde un enfoque teórico como empírico. En la tercera sección se repasará la investigación empírica realizada en torno a los diferentes modelos, fundamentalmente en el campo de la inmunización de carteras de renta fija. Finalmente, en la cuarta sección se realiza, a modo de conclusión, una valoración general del camino recorrido por la investigación en el campo que nos ocupa.

1. La inmunización y el modelo tradicional de duración

1.1. Inmunización, duración y convexidad

La *inmunización* es una estrategia pasiva en el ámbito de las carteras de renta fija. A diferencia de las estrategias activas, cuyo éxito depende de una correcta anticipación por parte del gestor de los desplazamientos de la curva de tipos, las estrategias pasivas tratan de asegurar un determinado rendimiento para una cartera de activos durante un determinado horizonte planificador al margen de cual sea la evolución de los tipos de interés[1]. Con este fin, las estrategias pasivas tratan de encontrar un adecuado equilibrio entre dos efectos contrapuestos generados por los movimientos de la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI): el *efecto precio* y el *efecto reinversión*.

Cuando los tipos de interés suben (bajan), los flujos futuros de una cartera de renta fija se descuentan a un mayor tipo de interés con lo que el valor actual de la cartera baja (sube) –efecto precio– pero, por otra parte, el alza (descenso) de los tipos hace que los flujos que se vayan obteniendo puedan reinvertirse a un mayor (menor) tipo de interés aumentando (descendiendo) el valor final de la inversión

(1) Nos referimos al concepto de inmunización en sentido fuerte [Bierwag, Kaufman y Toevs (1983)].

–efecto reinversión. La inmunización trata, precisamente, de lograr compensar ambos efectos, pues ello hace que la cartera se muestre inmune a los cambios en los tipos de interés.

Desde sus orígenes, la inmunización se encuentra estrechamente ligada a la duración, un concepto debido a Macaulay (1938) que resurgió en repetidas ocasiones en la literatura de primera mitad de siglo bajo diferentes denominaciones. Concretamente, Hicks (1939) y Samuelson (1945) emplearon los términos *vencimiento medio* y *período temporal medio ponderado*, respectivamente. Por su parte, Redington (1952), que acuñó el término de inmunización para referirse a "la inversión en activos de tal forma que el patrimonio existente es inmune a un cambio general en los tipos de interés", hacía uso del concepto de término medio para explicar que en un contexto en que la curva de tipos es plana y se desplaza sólo paralelamente la inmunización se conseguiría si los activos eran elegidos de tal forma que su término medio coincidiera con el de los pasivos y se verificaban ciertas condiciones de segundo orden.

De entre todas estas medidas obtenidas de forma independiente fue el término duración el que tomó popularidad, y ello tras el trabajo empírico de Fisher y Weil (1971). Estos investigadores se interesaron, no por la inmunización de una corriente de pasivos como fue el caso de Redington, sino por la inmunización de una cartera de activos respecto a un determinado y único horizonte temporal. Así, definieron el objetivo de la inmunización de la forma en que inicialmente nosotros hemos hecho: *garantizar la rentabilidad de una cartera* durante un determinado período planificador o, dicho de otra forma, que independientemente de cual fuera la evolución de los tipos de interés, la cartera genere, al menos, la rentabilidad ofrecida inicialmente por el mercado para dicho horizonte.

Antes de comprobar cómo se puede alcanzar este resultado, es de interés reflexionar sobre el impacto que los tipos de interés tienen sobre el valor actual de una cartera de activos. Supongamos, para ello, que se construye una cartera en el instante actual (0) cuyos flujos de caja vienen dados por F_1, F_2, ..., F_v. El valor inicial de la cartera vendrá dado por:

$$P_0 = \sum_{i=1}^{v} F_i \; d_i^0 \tag{1}$$

donde d_i es el factor de descuento para el plazo i. Si $\{\iota^0\}_i$ es la curva de *forward* instantáneos actual,

$$d_i^0 = \exp\left[-\int_0^i \iota_s^0 \; ds\right]$$

o, equivalentemente:

$$d_i^0 = \exp\left[-\tau_i^0 \, i\right]$$

donde $\{\tau^0\}_i$ es la ETTI al contado de capitalización continua actual.

Supongamos que los tipos al contado de capitalización continua cambian instantáneamente a $\{\tau'\}_i$. Obviamente, el cambio en el valor actual de la cartera vendrá dado por:

$$\Delta P_0 = \sum_{i=1}^{v} F_i \left[\exp\left[-\tau_i' \, i \right] - \exp\left[-\tau_i^0 \, i \right] \right]$$

Una expansión de Taylor de orden dos del valor actual de la cartera en el entorno de la ETTI inicial nos permite obtener la siguiente aproximación al cambio en su valor inicial:

$$\Delta P_0 \approx -\sum_{i=1}^{v} F_i \, i \exp\left[-\tau_i^0 \, i \right] \Delta\tau_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{v} F_i \, i^2 \exp\left[-\tau_i^0 \, i \right] \left(\Delta\tau_i \right)^2 \qquad [2]$$

Atendiendo exclusivamente al primer grupo de términos, que podemos denominar *efectos de primer orden del shock*, se observa claramente que el aumento de los tipos de interés provoca una reducción del valor actual de la cartera, ya que por ahora únicamente estamos considerando el efecto precio. Como asimismo se deduce de la expresión, el impacto del desplazamiento de la ETTI sobre el valor de la cartera depende de la distribución de sus flujos de caja así como de la magnitud del cambio de los tipos de interés. Así, dos carteras distintas generarán diferentes rendimientos instantáneos ante el mismo desplazamiento de la ETTI y la misma cartera verá variar su valor de forma diferente ante distintos desplazamientos de la curva de tipos.

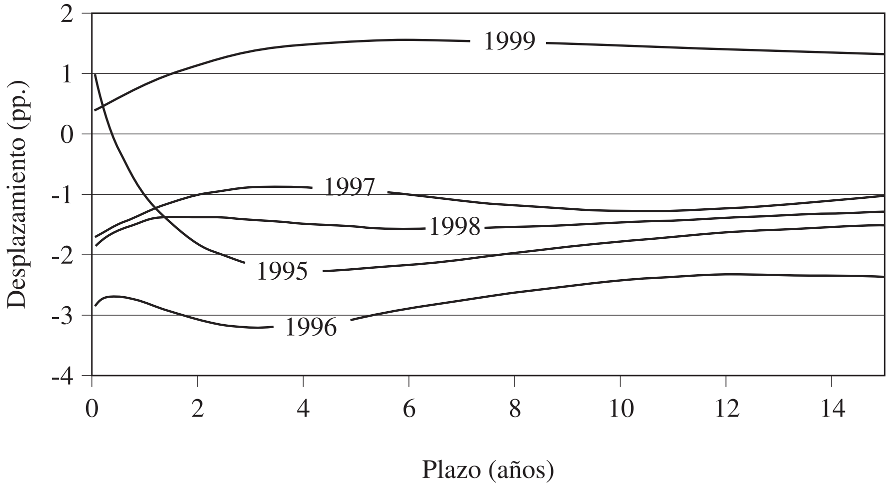
Por tanto, una primera incógnita para descubrir cómo reaccionará nuestra cartera es conocer qué tipo de desplazamiento experimentará la ETTI. Desgraciadamente, no es sencillo resolver esta cuestión[2]. El gráfico 1, en donde se han representado los cambios registrados por la ETTI de capitalización continua del mercado de deuda pública español cada año a partir de 1995, nos muestra que ésta se ha desplazado de forma bien diferente en los años considerados y que el perfil de los cambios, aunque suave, *a priori* no admite una sencilla representación. En cualquier caso, es un hecho que se hace patente en el gráfico que los desplazamientos no sólo afectan al *nivel* de la curva de tipos, sino también de forma significativa a su *pendiente* y su *curvatura.*

En sus orígenes, el modelo de duración únicamente se ocupó del primero de los desplazamientos, que según muestra la evidencia empírica es el que en mayor medida explica los movimientos de la curva de tipos[3] pero que, como hemos visto, no el único. Es más, Macaulay, como consecuencia de “las insuperables dificultades derivadas de cualquier intento de descubrir las verdaderas tasas de descuento para cada período futuro” [Macaulay (1938), pág. 52], se decantó por el

(2) A este respecto puede verse, por ejemplo, Gómez y Novales (1997), en donde, tras la inspección de la curva de tipos del mercado de deuda español en el período 11/1992 a 10/1996, se concluye que no cabe afirmar que el desplazamiento dependa del perfil que inicialmente adopte la ETTI y que no se puede asumir que aquél sea paralelo, cuestión ésta relevante para el tema que aquí nos ocupa, como se podrá apreciar con posterioridad.

(3) El cuadro 5 muestra evidencia en este sentido.

Gráfico 1: Desplazamientos anuales de la curva de tipos española: 1995-1999



uso de la TIR de los bonos en la actualización de sus flujos de caja y definió los *shocks* en términos del cambio en la TIR, supuestos ambos que carecen de rigor siempre y cuando la curva de tipos no sea plana y se desplace exclusivamente de forma paralela.

Este supuesto de curva plana fue superado en el planteamiento de Fisher y Weil (1971) que, no obstante, siguió asumiendo como único desplazamiento el paralelo, en este caso en la curva de tipos *forward* instantáneos o, lo que es equivalente, en la curva de tipos al contado de capitalización continua[4]. La expresión [2], en este contexto, podría reescribirse:

$$\Delta P_0 \approx -\sum_{i=1}^{v} F_i \, i \exp\left[-\tau_i^0 \, i\right] \lambda + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{v} F_i \, i^2 \exp\left[-\tau_i^0 \, i\right] \lambda^2$$

donde el desplazamiento paralelo se define como $\Delta\tau_i = \lambda \ \forall i$. Dividiendo por el valor inicial de la cartera obtenemos la aproximación a la rentabilidad instantánea que se explica por los conceptos de duración (de Fisher y Weil) y de convexidad:

(4) Un desplazamiento paralelo de la ETTI de capitalización continua equivale a uno multiplicativo en la ETTI de capitalización compuesta puesto que entre ambas se mantiene la relación

$$\exp\left[\tau_i\right] = (1 + r_i)$$

donde r_i es el tipo de interés de capitalización compuesta para el plazo de i períodos.

$$\frac{\Delta P_0}{P_0} \approx -D_{FW}\,\lambda + \frac{1}{2} C\,\lambda^2 \qquad [3]$$

donde la duración y convexidad, en este contexto, vienen dadas por las siguientes expresiones[5]:

$$\begin{aligned} D_{FW} &= \frac{1}{P_0}\sum_{i=1}^{v} F_i\, i\, \exp\left[-\tau_i^0\, i\right] \\ C &= \frac{1}{P_0}\sum_{i=1}^{v} F_i\, i^2\, \exp\left[-\tau_i^0\, i\right] \end{aligned} \qquad [4]$$

Como se observa en la expresión [3], mientras que la duración guarda relación con el efecto de primer orden del desplazamiento de la curva de tipos, la convexidad interviene en la cuantificación del efecto de segundo orden. Si la convexidad es positiva, circunstancia que en el contexto del modelo tradicional sucede siempre si hablamos de un único bono con cupones o de una cartera de ellos en donde no existen posiciones en corto, el sumando de la convexidad será positivo. Por ello, se argumenta habitualmente que la aproximación al riesgo de precio que ofrece la duración es una valoración pesimista, es decir, sobrevalora las caídas en el precio e infravalora los ascensos, y tanto más cuanto mayor sea la convexidad de la cartera y el cambio en los tipos de interés. Teniendo en cuenta esto, la implicación de una mayor convexidad en el contexto del análisis tradicional es clara: a igual duración, una mayor convexidad supondrá cambios en los precios en respuesta a cambios en el rendimiento más favorables para el inversor.

Al igual que la duración, la técnica de la inmunización, en sus orígenes, asumió supuestos muy restrictivos. Concretamente, Redington consideró curvas de tipos planas que se desplazaban paralelamente; posteriormente, Fisher y Weil, como comentamos, levantaron el supuesto de una curva plana y definieron los *shocks* (o cambios no anticipados de la curva de tipos) como aquéllos no explicados por el movimiento implícito de la curva (versión fuerte de la teoría de las expectativas puras). Trabajando en el contexto anteriormente considerado, el teorema de inmunización de Fisher y Weil demostraba que la inmunización frente a un único *shock* que se produce instantáneamente tras la constitución de la cartera y que adopta la forma de un movimiento paralelo de la curva de tipos de capitalización continua se lograría si se igualaba la duración de la cartera a la amplitud del horizonte planificador. La justificación teórica de este argumento es bien sencilla, como se verá a continuación.

---

(5) En el contexto de Macaulay, la duración y la convexidad se definen de forma diferente. Concretamente, denotando por y la TIR del bono o la cartera,

$$D = \frac{1}{P_0}\sum_{i=1}^{v} F_i\, i\,(1+y)^{-i} \qquad \text{y} \qquad C = \frac{1}{P_0}\sum_{i=1}^{v} F_i\, i(1+i)(1+y)^{-(i+2)}$$

y la rentabilidad instantánea viene dada por $\dfrac{\Delta P_0}{P_0} \approx -\dfrac{D}{1+y}\Delta y + \dfrac{1}{2} C(\Delta y)^2$

Sea $\{\tau^0\}_i$ la ETTI inicial de capitalización continua y λ la magnitud del *shock* paralelo. En ausencia de *shocks*, el valor de la cartera al cabo de un horizonte planificador de H períodos vendrá dado por:

$$P_H = \exp\left[\tau_H^0 H\right] P_0$$

Si tiene lugar el *shock* instantáneamente tras la constitución de la cartera y no tiene lugar ninguno más hasta el período H, los valores inicial y final de la cartera serán:

$$P_0' = \sum_{i=1}^{v} F_i \exp\left[-\tau_i' i\right] = \sum_{i=1}^{v} F_i \exp\left[-\left(\tau_i^0 + \lambda\right) i\right]$$

$$P_H' = \exp\left[\left(\tau_H^0 + \lambda\right) H\right] \sum_{i=1}^{v} F_i \exp\left[-\left(\tau_i^0 + \lambda\right) i\right] =$$

$$= \exp\left[\tau_H^0 H\right] \sum_{i=1}^{v} F_i \exp\left[-\tau_i^0 i - \lambda\left(i - H\right)\right]$$

La cartera estará inmunizada si $P_H' \geq P_H\ \forall\lambda$, o lo que es equivalente, si $\Delta(\lambda) = P_H' - P_H \geq 0\ \forall\lambda$. Las dos primeras derivadas con respecto a λ de esta diferencia son:

$$\Delta'\left(\lambda\right) = \exp\left[\tau_H^0 H\right] \sum_{i=1}^{v} \left(H - i\right) F_i \exp\left[-\tau_i^0 i - \lambda\left(i - H\right)\right]$$

$$\Delta''\left(\lambda\right) = \exp\left[\tau_H^0 H\right] \sum_{i=1}^{v} \left(H - i\right)^2 F_i \exp\left[-\tau_i^0 i - \lambda\left(i - H\right)\right]$$

como se puede deducir, si la cartera no está compuesta de un único bono cupón cero con vencimiento en H y todos los flujos de caja son no negativos, $F_i \geq 0\ \forall i$, entonces $\Delta''(\lambda) > 0$, es decir, $\Delta''(\lambda)$ es una función estrictamente convexa del *shock*. Consecuentemente, si la cartera se configura de tal forma que $\Delta'(0) = 0$, la mínima diferencia posible será cero y se alcanzará cuando no tenga lugar *shock* alguno, $\Delta(0) = 0$. Cualquier *shock*, $\lambda <> 0$, en definitiva, procurará mayores rendimientos de los que inicialmente se prometían para dicho horizonte planificador, con lo que la cartera estaría inmunizada. La condición para que $\Delta'(0) = 0$ viene dada por:

$$\frac{1}{P_0} \sum_{i=1}^{v} F_i\, i \exp\left[-\tau_i^0 i\right] = H$$

donde el primer término, como se puede comprobar, es la duración de Fisher y Weil. En definitiva, y como anticipábamos, si la duración coincide con el horizonte planificador o, lo que es equivalente, con la duración de un bono cupón cero con vencimiento al final del horizonte, la cartera estará inmunizada, ya que los efectos de primer orden del *shock* se anulan y se obtienen ganancias por convexidad. Si, por contra, la duración y el horizonte no coinciden, los efectos precio y reinversión no se compensarán y uno dominará al otro. Concretamente, si la duración supera al horizonte planificador, si los tipos suben el efecto precio (negativo) superará al efecto reinversión (positivo) y el rendimiento generado será inferior al previsto. Lo contrario sucede si los tipos de interés descienden o si la duración es inferior al horizonte planificador.

1.2. Una sencillez basada en el simplismo: las limitaciones del modelo tradicional

La duración y la convexidad tradicionales son, como hemos visto, conceptos extremadamente sencillos, lo que favoreció su amplia expansión durante años. Sin embargo esta sencillez descansa, en gran medida, en los restrictivos supuestos sobre los que se basan.

En particular, el concepto de duración de Macaulay supone una ETTI plana que se desplaza paralelamente y que valida la TIR como tasa a la que realizar el descuento de los flujos de caja y como factor de riesgo que se desea gestionar. El modelo de Fisher y Weil, aunque elimina el supuesto de ETTI plana, sigue considerando el desplazamiento paralelo como el único relevante. Por último, en ambos casos se supone que los cambios en la ETTI son instantáneos en el sentido de que se supone que se agotan en un sólo momento, es decir, que todo el cambio se produce en un instante y, por otro lado, instantáneo desde el mismo momento en que dicho cambio se produce tras la constitución de la cartera. Dicho de otra forma, la duración y convexidad tradicionales miden el riesgo que se derivaría de un cambio inmediato en la curva de tipos, pero no de un cambio que tenga lugar en el futuro o se distribuya a lo largo del tiempo.

La clara irrealidad de tales supuestos, sobre todo el que identifica los desplazamientos de la curva de tipos con un mero cambio en su nivel, han motivado el desarrollo en la literatura financiera de fórmulas alternativas que tratan de recoger más eficazmente y en un contexto más flexible el verdadero riesgo de interés de las carteras de renta fija. No obstante, muchas de las redefiniciones reposan en un plano estrictamente teórico y el concepto tradicional de duración al que complementa la convexidad, aun a pesar de sus limitaciones, sigue siendo considerado un instrumento básico en la gestión de carteras y patrimonios. Sin duda alguna, el éxito que los modelos de duración más simples (básicamente los tradicionales) mostraron en la investigación empírica realizada hasta la década de los ochenta promovió su extensión aunque, como se verá posteriormente, sus resultados han de analizarse con cierta cautela.

2. Otros modelos de duraciones

En esta sección veremos los modelos de duración más destacados que se ha propuesto en la literatura financiera durante más de veinte años de investigación con el objetivo de solventar, en alguna medida, las limitaciones del modelo tradicional. De forma previa a nuestra exposición, se muestra de interés comentar tres aspectos.

En primer lugar, es importante destacar que las restricciones de inmunización y la duración (o vector de duraciones, en el caso de definirse varios factores de riesgo) dependen, obviamente, del proceso de cambios asumido para la ETTI. Es más, existen procesos para los cuales es imposible inmunizar en la medida en que no es posible encontrar un bono que genere, al menos, el rendimiento ofrecido inicialmente por el mercado[6].

En segundo lugar, algunos de los modelos que se han venido planteando consideran la inmunización, no como una técnica que garantiza la obtención, como mínimo, del rendimiento inicialmente prometido por el mercado, sino como la búsqueda de carteras cuya sensibilidad a los cambios en los tipos de interés es mínima. Ello supone un importante cambio en el marco de referencia ya que, mientras que en el primer caso, como hemos visto, juega un papel fundamental que el valor final de la cartera sea una función convexa del *shock*, en el segundo no es así. Consecuentemente, los modelos que buscan la minimización de sensibilidades, a diferencia de los modelos que buscan una rentabilidad garantizada, suelen admitir posiciones en corto y plantean la inmunización como la construcción de una cartera tal que su valor sea siempre lo más cercano posible al valor de un bono cupón cero con vencimiento al final del horizonte planificador ya que éste, por definición, generará el rendimiento inicial. No obstante, si se considera que los efectos de segundo orden de los desplazamientos de la ETTI son mínimos en la explicación de los rendimientos, como parece apuntar la evidencia empírica obtenida por Kahn y Lochoff (1990) y Lacey y Nawalkha (1993) en el caso estadounidense y por Soto (2001) en el español, el resultado obtenido según ambas formas de proceder ha de ser muy similar siempre y cuando los modelos estén bien especificados.

Por último, habría que distinguir entre dos enfoques que se han venido utilizando en la literatura para proponer nuevas medidas de duración tanto en el pasado como en la actualidad: el enfoque *empírico* y el *teórico*.

Por una parte, los que podemos denominar *modelos empíricos* tratan de ajustar los desplazamientos y perfiles de la ETTI observados mediante diversas formas funcionales para posteriormente elaborar las medidas de duración o sensibilidad coherentes con dichos desplazamientos o bien, trasladando la prueba empírica al final, evalúan la validez de medidas de sensibilidad derivadas de desplazamientos de la curva de tipos muy simples que, a pesar de ello, pueden recoger una parte bastante significativa de la variabilidad efectiva de los tipos de interés. Todo ello se realiza obviando cualquier consideración en torno a si el cambio de las variables de estado (o factores de riesgo) es coherente con el equilibrio del mercado (ausencia de posibilidades de arbitraje). Por ello, no es de extrañar que las principales críticas que se realizan a estos modelos procedan del enfoque teórico y se centren en esta cuestión.

Los *modelos teóricos*, por su parte, más escasos y conducentes a duraciones con expresiones más complejas, con frecuencia denominadas *duraciones estocásti-*

(6) Esta cuestión se aborda en Balbás e Ibáñez (1998), quienes establecen una clara separación entre carteras *maximin* (carteras que maximizan el mínimo rendimiento alcanzable) y carteras inmunizadas (que garantizan la obtención del rendimiento inicialmente prometido por el mercado). Balbás e Ibáñez muestran, en un contexto muy general, que toda cartera inmunizada es una cartera *maximin* pero que la implicación inversa no es necesariamente cierta.

cas o *generalizadas*, parten de una caracterización teóricamente coherente de la ETTI y de su dinámica estocástica para derivar, a partir de ella, la/s medida/s de duración correspondientes. El hecho de que las variables de estado de estos modelos y los procesos estocásticos que rigen su evolución se hayan de especificar *a priori*, junto con la circunstancia de que el número de variables de estado ha de ser muy reducido (generalmente, una o dos) para garantizar una mínima manejabilidad analítica, son las principales limitaciones a las que se enfrenta el enfoque teórico.

En ambos casos, y como se verá a continuación, nos encontramos con *modelos unifactoriales*, en donde se considera una sola fuente de incertidumbre (o factor de riesgo), y *modelos multifactoriales*, con varios factores.

Obviamente, los modelos unifactoriales (en donde se incluyen los de Macaulay y Fisher y Weil) tienen a su favor el hecho de que son mucho más sencillos, cuestión ésta que resulta de especial transcendencia en el caso de los modelos teóricos. Sin embargo, plantean un serio inconveniente, y es que el reconocimiento de que existe una única fuente de riesgo lleva implícito el supuesto de que los rendimientos de los bonos están perfectamente correlacionados, algo que no parece apoyar en absoluto la evidencia empírica. Por ello, en las dos últimas décadas los esfuerzos se han dirigido en mayor medida a plantear modelos multifactoriales.

Sin duda, dentro del conjunto de modelos multifactoriales son los empíricos los que han aparecido con mayor profusión. Posiblemente, tras la primacía de los modelos empíricos frente a los teóricos se encuentra el hecho de que los esfuerzos realizados para desarrollar nuevos modelos de duración tienen como objetivo mejorar las coberturas –en un caso extremo, inmunizar– y, en este campo, los profesionales de las finanzas y los academicistas suelen no coincidir. Hull expresa esta desavenencia de la siguiente forma: "En cualquier modelo para *r* que usemos, sólo hay determinadas formas en que la estructura temporal puede moverse. Los puristas pudieran argumentar que sólo se debería cubrir frente a esos movimientos concretos en vez de frente todos los posibles movimientos. En la práctica, sin embargo, se sigue usualmente el procedimiento descrito con anterioridad aunque es en cierta medida inconsistente con el modelo que se está usando. Podemos establecer una analogía con el modelo de Black-Scholes por lo que le concierne. Cuando se valoran opciones sobre acciones, los analistas suelen suponer que la volatilidad es constante pero, cuando cubren, reconocen que el modelo es imperfecto y cubren ante cambios en la volatilidad calculando los parámetros vega" [Hull (1993), pág. 409]. Parece, pues, que las limitaciones a las que se enfrentan los modelos teóricos son la fuente de su escasa aplicación para la gestión del riesgo de interés[7].

2.1. Propuestas desde un enfoque empírico

Desde el trabajo, pionero en muchos aspectos, de Fisher y Weil, surgió un gran interés por plantear nuevos modelos de duración. Desde la óptica empírica, y en un contexto univariante, destacan, siguiendo un orden cronológico, los trabajos de Bierwag y Kaufman (1977), Bierwag (1977), Khang (1979) y Babbel (1983).

(7) Es de interés señalar que en el campo de la inmunización los modelos teóricos se enfrentan a un problema añadido, y es que son muy sensibles a errores de especificación en el largo plazo cuando éste es, precisamente, el horizonte para el que se plantea la inmunización.

Mientras que en los dos primeros casos el desplazamiento de la curva de tipos (de capitalización discreta en el primer trabajo y de capitalización continua en el segundo) se especificaba de forma *ad-hoc*, en particular, dándole un perfil paralelo y multiplicativo, en los otros dos el objetivo prioritario es tratar de recoger la verdadera dinámica de los tipos de interés. Así, Khang (1979) define dos tipos de desplazamientos coherentes con el hecho de que la volatilidad de los tipos de interés desciende a medida que aumenta el plazo y Babbel (1983) opta por que sea la propia curva de tipos la que exprese, mediante el uso de técnicas de estimación, la dependencia entre los cambios en los tipos a corto plazo y los cambios en los restantes tipos. Avanzando incluso un paso más, Babbel reconocía la posibilidad de que dicha dependencia variara a lo largo del tiempo y que pudiera ser predecible. En el cuadro 1 se concretan las duraciones correspondientes a los *shocks* anteriores. A modo de ilustración, en el gráfico 2 se han representado nuevas curvas de tipos que resultan de aplicar los *shocks* anteriores (exceptuando el de Babbel) a la ETTI vigente el último día hábil de 1999.

La insuficiencia de los modelos univariantes para captar la dinámica de la curva de tipos despertó el interés por plantear nuevos procesos de cambio y modelos de duración de carácter multifactorial, ello a pesar de que la evidencia empírica obtenida hasta mediados de los ochenta referida a la inmunización de carteras de renta fija apoyaba el uso de la duración tradicional, como veremos en la tercera sección. El desarrollo de modelos empíricos multifactoriales, en contra de lo que pudiera parecer, ya se inició en los primeros años de andadura del concepto de duración, pudiéndose destacar el trabajo ya citado de Bierwag (1977), en donde se combinaban los desplazamientos paralelo y multiplicativo en uno solo, y un interesante artículo de Cooper (1977).

Si dejamos al margen el de Bierwag, y tratamos de establecer una clasificación de los numerosos modelos multifactoriales empíricos que se han venido planteando, podríamos distinguir entre modelos de *duraciones paramétricas*, de *duraciones direccionales* y, por último, de *duraciones parciales*[8]. Resumidamente, sus características diferenciales vendrían a ser las siguientes:

– Los modelos de *duraciones paramétricas* parten del uso de formas funcionales multiparamétricas para el ajuste de la curva de tipos y, por ende, de sus desplazamientos.

– Las *duraciones direccionales* recogen la sensibilidad de las carteras a un número limitado de factores, observables o no, que dirigen el movimiento de la curva de tipos.

– Por último, las *duraciones parciales* cuantifican la sensibilidad de un activo de renta fija a cambios en un limitado conjunto de tipos de interés.

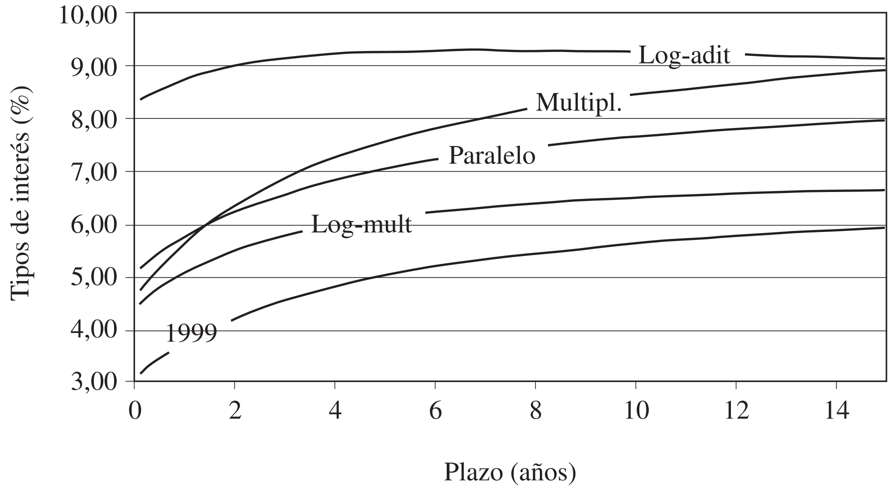
(8) Se ha de hacer constar que la denominación que otorgamos a los modelos no coincide necesariamente con la original, ya que ésta, en muchos casos, o bien no ofrece información en torno a sus fundamentos, o bien puede inducir a confusión al coincidir con otras definidas en términos bien distintos o, por otra parte, distanciarse de otras que cuentan con una base similar. Es más, en algunos casos ni tan siquiera se les denomina modelos de duración.

Cuadro 1: Modelos de duración unifactoriales empíricos más representativos

Trabajos	Tipo de desplazamiento	Especificación del modelo para la ETTI	Definición de la duración
Fisher y Weil (1971)	Paralelo	$d\tau_i = \kappa$	$D_{FW} = \frac{1}{P_0}\sum_{i=1}^{\nu} F_i \; i \exp\left[-\tau_i i\right]$
Bierwag (1977)	Multiplicativo	$\tau_i' = \kappa\tau_i$	$\tau_D D_B = \frac{1}{P_0}\sum_{i=1}^{\nu} F_i \; i \; \tau_i \; \exp\left[-\tau_i i\right]$
Khang (1979)	log-multiplicativo	$\tau_i' = \left[1 + \frac{\kappa \ln\left(1+\alpha i\right)}{\alpha i}\right]\tau_i$	$\tau_D \ln\left(1+\alpha D_{K/M}\right) = \frac{1}{P_0}\sum_{i=1}^{\nu} F_i \ln\left(1+\alpha i\right) \tau_i \exp\left[-\tau_i i\right]$
	log-aditivo	$\tau_i' = \tau_i + \frac{\kappa \ln\left(1+\alpha i\right)}{\alpha i}$	$\ln\left(1+\alpha D_{K/A}\right) = \frac{1}{P_0}\sum_{i=1}^{\nu} F_i \ln\left(1+\alpha i\right) \exp\left[-\tau_i i\right]$
Babbel (1983)	Variable en el plazo y en tiempo	$\frac{\left(1+r_i'\right)}{\left(1+r_i\right)} - 1 = \beta_i \frac{\left(1+r_1'\right)}{\left(1+r_1\right)} - 1$ con β_i variable a lo largo del tiempo	$\beta_D D_{BB} = \frac{1}{P_0}\sum_{i=1}^{\nu} F_i \; i \; \beta_i \left(1+r_i\right)^{-i}$

Notas: desplazamientos definidos sobre la curva de tipos al contado de capitalización continua salvo en el caso de Babbel (1983), en donde el *shock* se define sobre los tipos de capitalización compuesta (r).

Gráfico 2: Curvas de tipos tras ciertos *shocks* univariantes



2.1.1. Modelos de duraciones paramétricas

En este primer grupo de modelos, el de duraciones paramétricas, las medidas de duración se definen a partir de la sensibilidad que los activos de renta fija muestran al cambio en los parámetros de alguna forma funcional que permite ajustar empíricamente[9] la curva de tipos.

La idea, por tanto, es sencilla. Cualquier curva de tipos, como su propio nombre indica, es una curva que puede ajustarse con mayor o menor precisión mediante funciones matemáticas dependientes de un número limitado de parámetros. Habiendo elegido una función concreta como la más idónea para este ajuste, los cambios de los tipos de interés configurarán nuevas curvas que podrán ajustarse mediante la misma forma funcional, pero ahora con unos parámetros diferentes. Así, los parámetros constituyen los factores de riesgo ante los cuales ha de computarse la sensibilidad del valor del activo o la cartera para gestionar el riesgo de interés.

La dificultad evidente de esta tarea reside en la elección de la función que pueda ajustar los muy diversos perfiles que la curva de tipos registrará a lo largo del tiempo. Es tanto así que en el mencionado trabajo de Cooper (1977), que se incluiría dentro de esta categoría de modelos, se llegan a considerar hasta cuatro

(9) Con el calificativo de empírico nos referimos al hecho de que las funciones utilizadas no surgen de un modelo teórico para la curva de tipos, pues éstos dan lugar a modelos de duraciones estocásticas. En el campo de la estimación de los tipos de interés a partir de las cotizaciones de los activos con cupón, al igual que sucede en la práctica de las coberturas, los modelos de ajuste empíricos son los que gozan de mayor aceptación en el ámbito profesional.

formas funcionales multiparamétricas para el ajuste de la ETTI de capitalización continua: las propuestas por Cohen, Kramer y Waugh (1966), por Bradley y Crane (1973)[10], lo que vendría a ser una simplificación de la forma funcional propuesta por Nelson y Siegel (1987) para la estimación de la ETTI y una última función más sencilla que la anterior pero en la misma línea.

La amplitud de los desarrollos de Cooper nos obliga a omitir la exposición de su modelo. No obstante, a continuación nos centraremos en el modelo de Willner (1999) y Gómez (1999), en donde se recurre, precisamente, a la forma funcional propuesta por Nelson y Siegel (1987) para obtener un modelo de duraciones que podemos denominar de *duraciones exponenciales* basándonos en el tipo de expresiones que se obtienen para la duración.

La elección de la ecuación de ajuste de Nelson y Siegel por parte de estos autores radica, por una parte, en su elevada capacidad para ajustar la nube de tipos de interés y, por tanto, sus desplazamientos y, por otra, en la interpretabilidad de sus parámetros, que constituyen los factores de riesgo cuya influencia sobre la cartera se ha de gestionar. Una somera explicación del modelo de Nelson y Siegel nos permitirá ilustrar estas cuestiones.

Nelson y Siegel (1987) contemplaron la posibilidad de que la ETTI de capitalización continua viniera dada por:

$$\tau_i = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)\frac{\beta}{i}\left[1 - \exp\left(-\frac{i}{\beta}\right)\right] - \alpha_3 \exp\left(-\frac{i}{\beta}\right) \qquad [5]$$

donde:

– α_1 es el tipo al contado asintótico ($\alpha_1 = \tau_\infty$). Como se aprecia, los cambios en este parámetro indican un cambio en el nivel de la curva de tipos.

– $\alpha_1 + \alpha_2$ es el tipo al contado para un plazo infinitesimalmente pequeño ($\alpha_1 + \alpha_2 = \tau_0$). Por consiguiente, $-\alpha_2$, sería la diferencia entre el tipo asintótico y el instantáneo, e informaría, así, en cierta medida, de la pendiente de la curva de tipos. Un $\Delta\alpha_2$ indicaría un descenso de la pendiente de la curva de tipos.

– El signo del parámetro α_3 determina la existencia de un máximo interior (si es positivo) o de un mínimo interior (si es negativo) o monotonicidad (si $\alpha_3 = 0$) en la curva de tipos. Por lo anterior, y teniendo en cuenta que la incidencia de este parámetro sobre los tipos a corto plazo y a largo plazo es reducida, puede entenderse que es indicativo de la curvatura que presenta el tramo intermedio de la ETTI. Un $\Delta\alpha_3$ indicaría un mayor grado de concavidad en una curva inicialmente cóncava o un menor grado de convexidad en una convexa.

– Por último, β indica, con su descenso, un mayor ritmo de acercamiento de los *forwards* instantáneos a su valor asintótico α_1 y con su aumento, una menor velocidad de alcance.

(10) Si bien ambas funciones se plantearon para el ajuste de la nube de TIRs, Cooper las aplica a los tipos cupón cero de capitalización continua para obtener sus medidas de duración.

Definida la curva de tipos de capitalización continua según [5], es inmediato obtener una expresión para el cambio en el valor de la cartera como consecuencia de un *shock* instantáneo[11]. En su aproximación lineal, vendría dada por:

$$\frac{\Delta P_0}{P_0} \approx -\sum_{j=1}^{3} D_j \Delta\alpha_j - D_\beta \Delta\beta \qquad [6]$$

En este modelo, las medidas de duración se definirían como:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \frac{1}{P_0}\sum_{i=1}^{v} F_i\, i \exp\left(-\tau_i^0 i\right) \\
D_2 &= \frac{1}{P_0}\sum_{i=1}^{v} F_i\, \beta\left[1-\exp\left(-\frac{i}{\beta}\right)\right]\exp\left(-\tau_i^0 i\right) \\
D_3 &= \frac{1}{P_0}\sum_{i=1}^{v} F_i\, \beta\left[1-\left(1+\frac{i}{\beta}\right)\exp\left(-\frac{i}{\beta}\right)\right]\exp\left(-\tau_i^0 i\right) \\
D_\beta &= \frac{1}{P_0}\sum_{i=1}^{v} F_i \left\{\left(\alpha_2+\alpha_3\right)-\left[\left(\alpha_2+\alpha_3\right)\left(1+\frac{i}{\beta}\right)+\frac{i^2\alpha_3}{\beta^2}\right]\exp\left(-\frac{i}{\beta}\right)\right\}\exp\left(-\tau_i^0 i\right)
\end{aligned} \qquad [7]$$

representando, respectivamente, la sensibilidad relativa del valor de la cartera a cambios en el nivel, la pendiente, la curvatura y la velocidad de convergencia hacia el tipo asintótico de la curva de tipos.

La inmunización del valor de la cartera para un horizonte de H períodos requerirá igualar las cuatro medidas de duración a las de un bono cupón cero con vencimiento en H y, siguiendo los supuestos de Gómez (1999), que las convexidades sean no negativas. Centrándonos en las condiciones de primer orden, las restricciones a imponer serían:

$$\begin{aligned}
D_1 &= H \\
D_2 &= \beta\left[1-\exp\left(-\frac{H}{\beta}\right)\right] \\
D_3 &= \beta\left[1-\left(1+\frac{H}{\beta}\right)\exp\left(-\frac{H}{\beta}\right)\right] \\
D_\beta &= \left(\alpha_2+\alpha_3\right)-\left[\left(\alpha_2+\alpha_3\right)\left(1+\frac{H}{\beta}\right)+\frac{H^2\alpha_3}{\beta^2}\right]\exp\left(-\frac{H}{\beta}\right)
\end{aligned}$$

(11) Willner inicialmente aplica el modelo de Nelson y Siegel para aproximar la curva de TIRs. Posteriormente, y reconociendo que con ello se consigue un ajuste más preciso, aproxima los tipos de capitalización compuesta. Nosotros, no obstante, exponemos el modelo en términos de los tipos de capitalización continua por homogeneidad. Gómez (1999), que amplía el modelo de Willner, trabaja también con tipos de capitalización continua.

Mucho más simple que el anterior resulta el modelo de *duraciones polinomiales* propuesto por Chambers y Carleton (1988) y Prisman y Shores (1988) puesto que, frente a la difícil forma funcional de Nelson y Siegel que se traduce en también difíciles medidas de duración, de lo que se parte en este caso es de un mero ajuste polinomial de la ETTI de capitalización continua y de sus desplazamientos. De hecho, la elección de un polinomio para ajustar los desplazamientos se justifica, precisamente, por la sencillez del vector de duraciones que se obtiene, a lo que habría de unirse un argumento adicional, y es que toda función continua, como *en teoría* ha de ser ETTI y, por ende, sus desplazamientos, puede aproximarse con bastante precisión por un polinomio.

Aunque Chambers y Carleton (1988) y Prisman y Shores (1988) parten del mismo tipo de ajuste y centran su interés en la inmunización de una cartera de activos, los dos trabajos difieren considerablemente entre sí. Así, por ejemplo, en la línea de lo comentado al inicio de esta sección, puede decirse que mientras que Prisman y Shores entienden la inmunización como la garantía de una rentabilidad mínima, Chambers y Carleton la plantean como una mera minimización de sensibilidades, lo que les permite, a diferencia de Prisman y Shores, considerar posiciones en corto en bonos a la hora de construir carteras inmunizadas. Puesto que este tipo de posiciones son estrictamente necesarias para construir una cartera que verifique el conjunto de restricciones de inmunización del modelo polinomial, mientras que Chambers y Carleton hablan de la posibilidad de eliminar por completo el riesgo de interés, Prisman y Shores plantean diferentes estrategias en las que la inmunización frente a un tipo de desplazamiento de la curva de tipos ha de hacerse a costa de aceptar una cierta exposición frente a otros tipos de cambios.

Por otra parte, Chambers y Carleton contemplan la posibilidad de *shocks* no infinitesimales, lo que les lleva a utilizar un desarrollo de Taylor de orden T, con $T > 1$ para aproximar el valor de la inversión y, por último, eliminan el supuesto de cambios instantáneos en la ETTI desarrollando por Taylor el valor de la cartera en un momento futuro.

En las líneas que siguen utilizaremos el marco de análisis de Chambers y Carleton para presentar el modelo polinomial, si bien por homogeneidad con el resto del trabajo supondremos que el desplazamiento de la ETTI se produce instantáneamente tras la constitución de la cartera. Así, supongamos que los desplazamientos no implícitos de la ETTI de capitalización continua son aproximables por polinomios en el plazo de grado $p - 1$, es decir:

$$\Delta \tau_i = \sum_{s=1}^{p} \Delta \alpha_s \, i^{s-1} \qquad [8]$$

donde $\Delta\alpha_s$, $s = 1, ..., p$, son los coeficientes del polinomio que ajusta el desplazamiento de la ETTI.

Si el *shock* que desplaza la ETTI de su senda implícita tiene lugar instantáneamente tras la constitución de la cartera, entonces el cambio relativo en el valor de la cartera vendrá aproximado por:

$$\frac{\Delta P_0}{P_0} \approx -\frac{1}{P_0}\sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{p} F_i\, i^j \exp\left[-\tau_i^0\, i\right]\Delta\alpha_j + \cdots + \\ + \frac{(-1)^T}{T!}\frac{1}{P_0}\sum_{i=1}^{v}\sum_{j_1=1}^{p}\cdots\sum_{j_T=1}^{p} F_i\, i^{j_1+\cdots+j_T}\exp\left[-\tau_i^0\, i\right]\prod_{h=1}^{T}\Delta\alpha_{j_h} \qquad [9]$$

De la expresión anterior se deducen medidas de duración de la forma:

$$D_s = \frac{1}{P_0}\sum_{i=1}^{v} F_i\, i^s \exp\left[-\tau_i^0\, i\right] \qquad [10]$$

y la inmunización de la cartera para un horizonte de H períodos exigirá que $D_s = H^s$ para todo s, con $s = 1, ..., Tp$. Si nos centramos exclusivamente en los efectos de primer orden del *shock*, podemos comprobar cómo la primera de las restricciones, $D_1 = H$, aísla la cartera de desplazamientos paralelos de la curva de tipos; la segunda, $D_2 = H^2$, de cambios en la pendiente en sentido estricto; la tercera, $D_3 = H^3$, de cambios con un perfil cuadrático en el plazo y así sucesivamente.

En un intento de valorar los dos modelos de duraciones paramétricas que hemos planteado, podríamos decir que, como anticipamos, el modelo polinomial da lugar a expresiones mucho más sencillas e intuitivas para el vector de duraciones que el modelo exponencial. Sin embargo, presenta un inconveniente fundamental, y es su falta de eficiencia. Esto es, el modelo polinomial, en la medida que inmuniza frente a cualquier desplazamiento con perfil suave de la curva de tipos, está inmunizando con respecto a *shocks* poco o muy poco probables que no preocuparían a un gestor pero que, sin embargo, limitan sus grados de libertad a la hora de administrar la cartera. Por contra, el modelo exponencial, restringe el tipo de desplazamientos (pensemos, por ejemplo, en el hecho de que éstos siempre presentarán una asíntota horizontal) y, puesto que el modelo de Nelson y Siegel de ajuste de la curva de tipos es uno de los que gozan de mayor aceptación, cabe suponer que los *shock* admisibles son suficientemente cercanos a la realidad. Sin embargo, frente a esta ventaja, el modelo exponencial presenta un *handicap* añadido a sus difíciles expresiones, y es que el gestor ha de disponer con frecuencia de series de tipos cupón cero fiables pues ha de estimar tres de los cuatro parámetros de la ecuación de Nelson y Siegel para obtener las cuatro medidas de duración o, en el caso de renunciar a la última, uno de los cuatro, concretamente el parámetro β, que mide la velocidad de convergencia hacia el tipo asintótico. Una solución a este problema, agravado por el hecho de que este parámetro resulta ser muy volátil[12] y ha de estimarse mediante métodos no lineales, pasaría por suponerlo constante como asume Willner, con lo que su estimación sólo habría de realizarse con escasa frecuencia[13].

(12) Sirva para ilustrar este hecho que para la totalidad del período considerado por Gómez y Novales (1997), que se extiende de noviembre de 1992 a octubre de 1996, el coeficiente de variación de este parámetro fue del 58,17%.

(13) De hecho, Willner (1996), Barrett, Gosnell y Heuson (1995) y los propios Nelson y Siegel (1987) comentan que el ajuste de la curva es "relativamente insensible" a los cambios en este parámetro.

2.1.2. Las duraciones direccionales

En el segundo grupo de modelos, el de duraciones direccionales, se parte de las interrelaciones entre los tipos de interés como forma de identificar, sobre la base de la información pasada de los desplazamientos de la curva de tipos, un conjunto limitado de variables, observables o no, que dirijan con considerable precisión el patrón de cambios de la ETTI y que, por tanto, constituyen el componente aleatorio cuya influencia sobre el valor de una cartera se trata de gestionar.

En particular, en los modelos de duraciones direccionales se trata de identificar las variables de estado x_j, $j = 1, ..., J$, que mejor explican la serie temporal de cambios no anticipados en la ETTI según el modelo lineal:

$$\Delta \tau_i = \sum_{j=1}^{J} \alpha_{j,i} \Delta x_j + \varepsilon_i \qquad [11]$$

donde, de nuevo, τ_i es el tipo cupón cero de capitalización continua a plazo de i períodos, los α_j son parámetros constantes en el tiempo y diferentes para cada tipo de interés, y ε es el componente no sistemático del cambio en cada tipo que recoge, por tanto, la dinámica no explicada por las variables comunes x_j.

La expresión anterior nos permite redefinir la variación no anticipada y sistemática del precio de un activo o cartera de ellos en función, exclusivamente, del cambio en las variables de estado. En concreto, la aproximación lineal al rendimiento instantáneo de la cartera derivado de un *shock* instantáneo vendría dada por:

$$\frac{\Delta P_0}{P_0} \approx -\frac{1}{P_0} \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{v} F_i \ i \ \alpha_{j,i} \exp\left(-\tau_i i\right) \Delta x_j \qquad [12]$$

Podemos ahora definir un nuevo vector de duraciones de dimensión J con elementos:

$$D_j = \frac{1}{P_0} \sum_{i=1}^{v} F_i \, i \, \alpha_{j,i} \exp\left[-\tau_i^0 \, i\right] \qquad [13]$$

que denominamos genéricamente *duraciones direccionales*, en la medida en que incorporan dentro de su definición el vector director de los cambios en el conjunto de tipos implicados en la valoración de la cartera por unidad de cambio en las variables de estado que explican la dinámica de la ETTI.

La inmunización de una cartera para un horizonte de H períodos exigirá el cumplimiento simultáneo del conjunto de restricciones $D_j = \alpha_{j,H} H$ con $j = 1, ..., J$. Por supuesto, en el caso de que la inmunización se plantee como garantizar la rentabilidad inicialmente prometida, adicionalmente se exigirán condiciones de segundo orden.

Una vez especificado el modelo, un segundo paso sería elegir las variables de estado y determinar los parámetros de las ecuaciones de reacción que ligan el cambio en aquéllas con el desplazamiento de la curva de tipos. En este sentido, hemos de hacer un especial hincapié en el hecho de que estos modelos sólo recurren a la historia de los cambios de la ETTI para tal fin, ya que éste es el elemento que les diferencia de las especificaciones *ad-hoc* de los *shocks* (paralelos, multiplicativos, funcionalmente dependientes de variables de estado preespecificadas, etc.) que caracterizan a buena parte del resto de modelos, sobre todo a los de corte teórico. Esta subordinación a los datos convierte a los modelos direccionales en los más acordes al pasado de las series de tipos pero, al mismo tiempo, abre un frente peligroso, y es que la validez de estos modelos para la gestión del riesgo de interés depende de que los desplazamientos futuros de la ETTI repliquen el patrón de los cambios acaecidos en el pasado. Por supuesto, se puede argumentar que conviene ir realizando una revisión de las variables de estado y de los parámetros de las ecuaciones de reacción a lo largo del tiempo para adecuarlos en mayor medida a la dinámica actual del mercado, lo cual está fuera de toda duda y, además, resulta un ejercicio deseable para aumentar la confianza del gestor en su modelo. Ahora bien, también es claro que una cierta estabilidad temporal del modelo es una cualidad deseable, no sólo para evitar nuevos costes de transacción en las reestructuraciones de cartera y minimizar el riesgo de proceso estocástico, sino también porque la necesidad de realizar actualizaciones plantearía una serie de nuevos interrogantes tales como cuál ha de ser su frecuencia o cuál la dimensión de la ventana de datos históricos de la que obtener las estimaciones.

Dependiendo del tipo de variable de estado que se seleccione, dentro del grupo de modelos de duraciones direccionales podemos distinguir los de *componentes principales* y los de *tipos óptimos*. Mientras que los primeros seleccionan como variables de estado las resultantes de la aplicación de la técnica estadística del análisis de componentes principales a la historia de los cambios en la ETTI, los segundos eligen una combinación de tipos de interés siguiendo algún criterio de ajuste.

En particular, en el primer trabajo en donde se plantea un modelo de tipos óptimos, el de Elton, Gruber y Michaely (1990), se propone, para un modelo bivariante, ordenar la capacidad explicativa de las combinaciones dos a dos de los diversos tipos de interés en la explicación de la dinámica del tipo a plazo i según el valor del producto del R^2 de la estimación MCO de la ecuación [11][14] y la varianza de la variable explicada, es decir, según $R_i^2\,\sigma^2_{\Delta\tau_i}$.

Ahora bien, puesto que los tipos óptimos lo han de ser para el conjunto de tipos de interés, aquéllos se definían como la combinación de tipos (τ_y, τ_z) que maximizara[15]:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i R^2_{i,y:z}\sigma^2_{\Delta\tau_i}$$

donde w es un vector de ponderaciones (no negativas). Por supuesto, la elección de un esquema de ponderaciones adecuado para el uso que se va a dar al modelo es una cuestión de gran relevancia, ya que diferentes ponderaciones pueden dar lugar a resultados bien distintos, en la medida en que sacrifican el ajuste de determinados tipos en favor de un mayor ajuste de otros.

(14) Para evitar problemas de multicolinealidad en la estimación, la expresión [11] se reescribe en términos del tipo a menor plazo y la diferencia entre el tipo a mayor plazo y el anterior (o viceversa).

(15) Nótese que la inclusión de las varianzas en el criterio de selección favorece el ajuste, dada la misma ponderación, de los tipos más volátiles.

2.1.3. Las duraciones parciales

Bajo esta denominación recogemos un último conjunto de modelos de duración que concluye en la obtención de un vector de duraciones cuyos elementos, las *duraciones parciales*, cuantifican el impacto sobre el valor de la cartera de los cambios en un conjunto de tipos de interés, denominados *vértices* de la estructura de tipos, elegidos generalmente de forma *ad-hoc*. El desplazamiento de la ETTI se define, ahora, por el cambio no anticipado en los tipos de interés vértices.

El precursor del modelo que aquí presentamos[16] es Reitano (1990, 1992, 1993, 1996), para quien los cambios en la ETTI, trasladados al contexto de capitalización continua que venimos utilizando, vendrían dados por $\Delta\tau = (\Delta\tau_{i_1}, \Delta\tau_{i_2}, ..., \Delta\tau_{i_p})$ donde p es el número de tipos vértices considerados.

Puesto que "se supone que los tipos a otros vencimientos dependen de los p tipos identificados según alguna especificación funcional, tal como la interpolación" [Reitano (1996), pág. 72], asimismo lo serán sus cambios, de forma que basta calcular la sensibilidad de la cartera a los cambios en los tipos vértices para definir completamente el impacto sobre el valor de la cartera de cualquier desplazamiento de la ETTI. En el gráfico 3 se ilustra el tipo de ajuste que se consigue del desplazamiento de la curva de tipos española en diciembre de 1999 mediante el uso de tipos vértices definidos como los tipos a plazos de 15, 12, 9, 6, 3 años y un mes y un esquema de interpolación lineal para los plazos intermedios.

La aproximación lineal al rendimiento instantáneo de la cartera en este modelo vendría dada por:

$$\frac{\Delta P_0}{P_0} \approx -\sum_{j=1}^{p} D_{p_j} \Delta\tau_{i_j} \qquad [14]$$

donde D_{p_j} es la duración parcial respecto al j-ésimo tipo vértice, definida como:

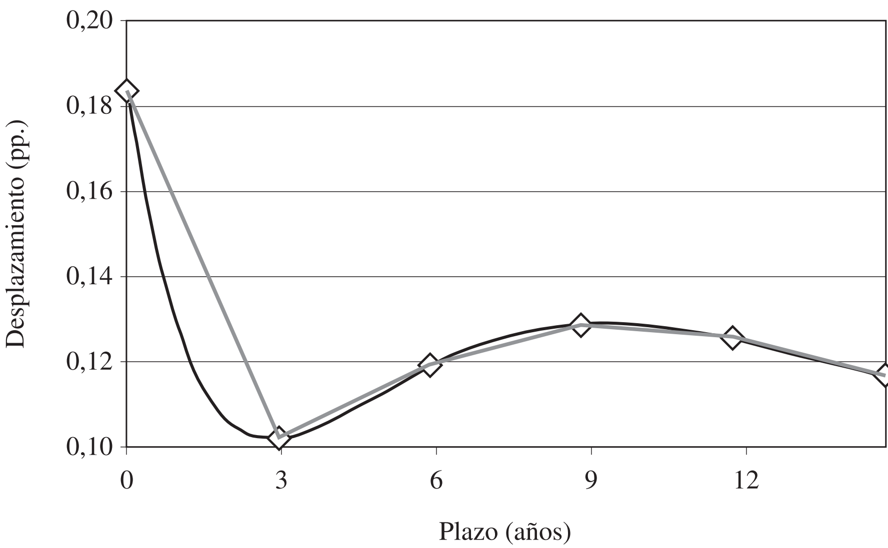
$$D_{p_j} = \frac{1}{P_0} \sum_{i=1}^{v} F_i \; i \; \alpha_{j,i} \exp\left(-\tau_i^0 i\right) \qquad [15]$$

expresión en la que, para la interpolación lineal por tramos propuesta, los $\alpha_{j,i}$ se anulan para todo tipo vértice j no contiguo al tipo a plazo i y para todo tipo a plazo i coincidente con un tipo vértice que no es el j-ésimo. La inmunización de una cartera según este modelo exigiría, como condiciones de primer orden, el cumplimiento del conjunto de restricciones $D_{p_j} = \alpha_{j,H} H$ con $j = 1, ..., p$.

Lógicamente, cuanto mayor sea el número de tipos vértices considerados tanto mayor será la capacidad del modelo para representar cualquier desplazamiento de la curva de tipos, pero también, en la inmunización de carteras, la tendencia hacia el *cash-flow matching* (réplica de los flujos de caja) de un activo cupón cero con vencimiento al final del horizonte planificador. En este sentido, Hill y Vaysman (1998), entre otros, han calificado al modelo de duraciones par-

(16) Por razones de brevedad, sólo exponemos en estas líneas el modelo planteado por Reitano, si bien en este grupo de modelos se incluirían también los propuestos por Johnson y Meyer (1989) y Ho (1992), entre otros.

Gráfico 3: Ajuste del desplazamiento mediante el uso de tipos vértices



ciales como de ineficiente, ya que, al igual que el polinomial, cubre e inmuniza ante desplazamientos improbables al no tener en cuenta las interrelaciones que existen entre los tipos de interés.

2.2. Modelos de duraciones estocásticas

Encabezando los planteamientos teóricos del modelo de duración, y como pionero en la crítica a los modelos empíricos, se encuentra el trabajo de Ingersoll, Skelton y Weil (1978), quienes no sólo mostraron la falta de substrato teórico de estos modelos, sino también, y en mayor medida, su total rechazo de la posibilidad de obtener ganancias por convexidad. A este respecto, explican que "cuando quiera que se muestre que una alguna estrategia de ajuste de duración dé lugar a una cartera que le reporte al inversor más que la tenencia de un bono al descuento puro bajo ciertas condiciones y no menos bajo otras, sólo puede concluirse que las posibilidades de arbitraje evitarán que la curva de tipos se comporte de la manera asumida" [Fisher, Skelton y Weil (1978), pág. 636].

Tras el trabajo de Ingersoll, Skelton y Weil han sido considerables los esfuerzos realizados para plantear duraciones estocásticas que, como hemos comentado, parten siempre de una caracterización dinámica internamente coherente para la ETTI. Expresándonos en unos términos muy generales, podemos plantear el problema de la siguiente forma: supongamos que los precios de los bonos cupón cero (y, por tanto, la ETTI), pueden expresarse en función del plazo y de un conjunto limitado de variables de estado, f_1, ..., f_k, que siguen procesos de Ito:

$$df_j = \mu_j\,(f_1, ..., f_k, t)\,dt + \sigma_j\,(f_1, ..., f_k, t)\,dw_i$$

donde *dt* es la variación del tiempo, *dw* es el incremento de un proceso de Wiener, y $\mu_j\,(f_1, ..., f_k, t)$ y $\sigma_j\,(f_1, ..., f_k, t)$ son funciones deterministas de sus parámetros y se interpretan como una deriva y una desviación típica (o difusión) instantáneas, respectivamente.

Aplicando el lema de Ito para obtener el cambio local en el precio de un bono cupón cero, y considerando la estructura de flujos de un bono o cartera, se obtiene la siguiente expresión para el rendimiento instantáneo de una cartera:

$$\frac{dP_0}{P_0} = \frac{1}{P_0}\mu_P(\cdot)\,dt + \sum_{j=1}^{k} D_j(\cdot)\,\sigma_j(\cdot)\,dw_j \qquad [16]$$

donde $\mu_j\,(\cdot)$ es el componente de deriva y $D_j\,(\cdot)$, $j = 1, ..., k$, son las duraciones generalizadas que se definen como:

$$D_j(\cdot) = -\frac{1}{P_0}\sum_{i=1}^{v} F_i\; i\, \exp\left[-\tau_i^0 i\right]\frac{\partial \tau_i}{\partial f_j} \qquad [17]$$

Obviamente, las particularizaciones de $\mu_j\,(\cdot)$ y $\sigma_j\,(\cdot)$ dan lugar a diferentes procesos estocásticos. Éstos, junto con el número de variables de estado consideradas y la forma funcional asumida[17] para las primas de riesgo con que el mercado valora la incertidumbre asociada a cada variable de estado, determinan la complejidad del modelo de ETTI y, por consiguiente, del modelo de duración.

Entre los trabajos en donde se han planteado explícitamente un modelo de duraciones generalizadas, en algunos casos realizando una contrastación empírica del modelo en un programa de inmunización como se verá con posterioridad, caben destacar los unifactoriales de Ingersoll, Skelton y Weil (1978) y Cox, Ingersoll y Ross (1979), los bifactoriales de Brennan y Schwartz (1983), Nelson y Schaefer (1983) y, en nuestro país, el de Moreno (1999) y, por último, el de tres factores de Chen (1996). En todos los casos, la inmunización se plantea como una estrategia de cobertura consistente en igualar la respuesta de la cartera al cambio en los factores de riesgo a la de un supuesto bono cupón cero con vencimiento al final del horizonte planificador.

Como se observa de la secuencia temporal de los trabajos, al igual que en el caso de los modelos empíricos, los enfoques unifactoriales han dejado paso a los multifactoriales. Sin embargo, a diferencia de los modelos empíricos, el número de variables de estado consideradas raramente supera el par ya que, como comentamos, el grado de complejidad analítica de estos modelos puede llegar a ser con-

(17) En el caso de modelos de la curva de tipos que surgen de modelos de equilibrio general de la economía, como el de Cox, Ingersoll y Ross, la prima se determina endógenamente. No obstante, estos modelos son los menos frecuentes, por lo que la forma funcional de las primas de riesgo suele especificarse *ad-hoc* en la literatura. Este hecho es objeto de numerosas críticas que, incluso, apuntan la posibilidad de que algunas funciones propuestas pudieran ser inconsistentes con el propio equilibrio del mercado de bonos [véase, por ejemplo, Boero y Torricelli (1996)].

Cuadro 2: Modelos teóricos para la ETTI empleados en la obtención de duración estocásticas

Trabajos	Especificación del modelo para la ETTI	
Ingersoll, Skelton y Weil (1978)	$d\zeta = \left[\lambda + \kappa\left(\bar{\zeta} - \zeta\right)\right]dt + \sigma dw$	$d\lambda = -\alpha\lambda dt + \beta\left(d\zeta - E\left[d\zeta\right]\right)$
Cox, Ingersoll y Ross (1979)	$d\zeta = \kappa\left(\bar{\zeta} - \zeta\right)dt + \sigma\sqrt{\zeta}dw$	
Brennan y Schwartz (1983)	$d\zeta = \left[\lambda + \kappa\left(\ell - \zeta\right)\right]dt + \zeta\sigma_1 dw_1$ $d\ell = \ell\left[\alpha_1 + \alpha_2\zeta + \alpha_3\ell\right]dt + \ell\sigma_2 dw_2$	$E\left[dw_1 dw_2\right] = \rho\, dt$, ρ constante
Nelson y Schaefer (1983)	$dL = \mu_L dt + \sigma_1 dw_1$ $ds = \kappa\left(\bar{s} - s\right)dt + \sigma_2 dw_2$	$E\left[dw_1 dw_2\right] = 0$
Chen (1996)	$d\zeta = \kappa_1\left(\theta - \zeta\right)dt + \sqrt{\sigma_1}\sqrt{\zeta}dw_1$ $d\theta = \kappa_2\left(\bar{\theta} - \theta\right)dt + \sigma_2\sqrt{\theta}dw_2$ $d\sigma_1 = \kappa_3\left(\bar{\sigma} - \sigma\right)dt + \sigma_3\sqrt{\sigma_1}dw_3$	$E\left[dw_1 dw_2\right] = \rho_{12}\ dt$ $E\left[dw_1 dw_3\right] = \rho_{13}\ dt$ $E\left[dw_2 dw_3\right] = \rho_{23}\ dt$ $\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}$ constantes
Moreno (1999)	$dL = \kappa_1\left(\bar{L} - L\right)dt + \sigma_1 dw_1$ $ds = \kappa_2\left(\bar{s} - s\right)dt + \sigma_2 dw_2$	$E\left[dw_1 dw_2\right] = 0$

Notas: ζ es el tipo de interés instantáneo, ℓ es el rendimiento de un bono perpetuo, L es un tipo de interés a largo plazo, y s es el diferencial (*spread*) entre un tipo a largo y un tipo a corto plazo.

siderable. Desgraciadamente, la evidencia empírica parece mostrar que este escaso número de variables de estado es insuficiente para reflejar la realidad de los desplazamientos de la curva de tipos.

Una segunda crítica que se realiza a este tipo de modelos es que las variables de estado y sus procesos suelen especificarse de una forma *ad-hoc* y, en muchos casos, sin demasiada justificación. Es más, a nivel empírico se han detectado problemas tales como la inestabilidad a lo largo del tiempo de los parámetros de los modelos y presencia de heterocedasticidad y autocorrelación en los residuos, todo lo cual son señales de mala especificación del modelo de la ETTI.

Por ambas razones, no es de extrañar que los modelos teóricos gocen de menor aceptación que los modelos empíricos a efectos no sólo de la inmunización sino también, en general, de la gestión del riesgo de interés. Sin ir más lejos, el conocido *RiskMetrics* de la banca Morgan propone el uso de un modelo basado en tipos vértices para la cuantificación del riesgo de interés de las carteras de renta fija. En cualquier caso, sigue existiendo una razón de peso para la continuidad de los modelos teóricos para la ETTI en la literatura financiera: su utilidad a la hora de valorar derivados sobre tipos de interés.

3. La evidencia empírica en torno a los modelos de duración

En esta sección presentaremos los principales resultados que se desprenden de la investigación empírica realizada en torno a la efectividad de las diferentes medidas de duración desde el trabajo de Fisher y Weil (1971), pionero en este campo. Nuestro interés necesariamente habrá de centrarse, por la profusión de trabajos, en aquéllos que mayor calado han tenido entre los investigadores de la duración, en los referentes a los modelos de duraciones multifactoriales empíricas tratados anteriormente y, por último, en los aplicados al caso español. En cuanto a la evidencia empírica relativa a los modelos de duraciones empíricas multifactoriales, analizaremos la obtenida en el campo de las duraciones paramétricas y direccionales de factores observables y no observables, ya que la evidencia en torno a los modelos de duraciones parciales es escasa y se encuentra muy dispersa.

Con el fin de obtener una visión global de los resultados alcanzados por los diferentes modelos en programas de inmunización, hemos resumido en el cuadro 3 los principales rasgos que definen los trabajos considerados y sus conclusiones. La evidencia relativa a los modelos direccionales, aunque ausente en el cuadro, será analizada con posterioridad, ya que ésta se ha centrado en obtener y analizar las direcciones del cambio en la ETTI sin extender la aplicación empírica de los modelos a la inmunización.

Exceptuando el trabajo de Chambers, Carleton y McEnally (1988), en donde se somete a examen el modelo polinomial, la principal conclusión que se obtiene del cuadro es la existencia de una amplia evidencia favorable a los modelos de duración unifactoriales más simples. Concretamente, las medidas de duración que presumen desplazamientos paralelos de la curva de tipos, como la de Macaulay (1938), la de Fisher y Weil (1971), o la de Bierwag (1977), presentan un grado de validez no inferior al de medidas de duración más complejas, como la duración

Cuadro 3: PRINCIPALES RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN EMPÍRICA

Trabajos	Período	Técnica	Estrategias testadas	Resultados
Fisher y Weil (1971)	1925-1968	Inmunización H = 5, 10 y 20 años	D_{FW} Vencimiento (1 bono)	D_{FW} » Vto
Bierwag, Kaufman, Schweitzer y Toevs (1981)	1925-1978	Inmunización H = 10 años	D_M, D_{FW}, D_B y $D_{K/M}$ Bono a cp (vto 1 año) Bono a lp (vto 20 años) Vencimiento (1 bono)	Bono a cp y a lp ofrecen los peores resultados Estrategias de duración » Vto Entre las estrategias de duración: D_{FW}~D_B » D_M » $D_{K/M}$
Bierwag, Kaufman y Toevs (1982)	1957-1974	Inmunización H = 5 años	D_M, D_{FW}, D_B y $D_{K/M}$ Vencimiento (1 bono)	Estrategias de duración (excepto $D_{K/M}$) » Vto
Babbel (1983)	1947-1980	Inmunización H = 5 años	D_{FW} y D_{BB}, siguiendo las estrategias de: – Inmunización: D = H – Forward-looking: D < H Bono a cp (vto 6 meses) Vencimiento (1 bono)	D_{FW} » D_{BB} » Vto » Bono a cp Inmunización » Forward-looking
Brennan y Schwartz (1983)	1958-1979	Inmunización H = 5 y 10 años y réplica de la evolución mensual de carteras de bonos	D_{FW} en cartera ladder $D_{BS/cp:lp}$	$D_{BS/cp:lp}$ no es claramente mejor que D_{FW}
Ingersoll (1983)	1950-1976	Inmunización H = 5 años	D_{FW} en carteras bullet, barbell y ladder Cartera de bonos a cp (vto 2 año) Carteras de bonos a lp (vto 10 años) Vencimiento (1 bono)	Las estrategias a cp y lp ofrecen los peores resultados Vto ~ D_M ~ D_{FW}

Cuadro 3: Principales resultados de la investigación empírica (continuación)

Trabajos	Período	Técnica	Estrategias testadas	Resultados
Nelsol y Schaefer (1983)	1930-1979	Réplica de la rentabilidad de bonos con vto en 5, 10 y 15 años	D_{FW} $D_{NS/cp}$ y $D_{NS/lp}$ $D_{NS/cp:sp}$ (sólo para la réplica de bonos a 10 años) Vencimiento (cartera de bonos)	$D_{NS/cp:sp}$ se comportó ligeramente peor que D_{FW} Entre los modelos de 1 factor: D_{FW} ~ $D_{NS/lp}$ » Vto » $D_{NS/cp}$
Chambers, Carleton y McEnally (1988)	1976-1980	Inmunización H de 1 a 15 trimestres	D_M Vector de duraciones polinomiales de hasta 7 elementos. Vencimiento (cartera de bonos) Ingenua (cartera de todos los bonos disponibles en igual proporción)	D_{P7} ~ D_{P6} ~ D_{P5} ~ D_{P4} » D_{P3} » D_{P2} » D_M » Vencimiento » Ingenua

Notas: *a»b* indica que la estrategia *a* mejora los resultados de la *b*, mientras que *a~b* indica que ambas estrategias ofrecen resultados similares. D_M es la duración de Macaulay (1938); D_{FW} es la de Fisher y Weil (1971) o, equivalentemente, la duración de *shock* multiplicativo de los tipos de capitalización compuesta de Bierwag y Kaufman (1977); D_B la de Bierwag y Kaufman (1977) de *shock* paralelo en la ETTI de capitalización compuesta; D_{BB} es la duración de Babbel (1983) de desplazamiento de la ETTI de capitalización compuesta de magnitud variable entre plazos y a lo largo del tiempo; $D_{K/M}$ es la duración log-multiplicativa de Khang (1979); $D_{BS/cp:lp}$ es el modelo de duraciones estocásticas de Brennan y Schwartz (1983) basado en un tipo a corto (1 mes) y un tipo a largo plazo (más de 20 años); $D_{NS/cp}$, $D_{NS/lp}$ y $D_{NS/cp:sp}$ son las duraciones estocásticas de Nelson y Schaefer (1983) de tipo a corto (1 año), de tipo a largo (13 años) y de tipo a largo (13 años) y su diferencial respecto a un tipo intermedio (5 años), respectivamente; D_{Pi} es el vector de duraciones polinomiales de Chambers y Carleton (1988) de dimensión *i*.

log-multiplicativa propuesta por Khang (1979), las duraciones estocásticas unifactoriales de tipo a corto plazo y a largo plazo, y los modelos de duración estocástica de dos factores. Por supuesto, y con la única excepción del trabajo de Ingersoll (1983), las primeras mejoran sustancialmente el comportamiento de la estrategia de vencimiento, término comparativo habitual de los modelos de duración en los estudios de inmunización, y que consiste en la adquisición y mantenimiento de un bono o cartera con vencimiento medio al final del horizonte planificador.

Ahora bien, en los ejercicios de simulación planteados en muchos de estos trabajos llama la atención la existencia de fuertes similitudes que, a nuestro juicio, colaboran claramente en la obtención de tales resultados. En particular, dichas similitudes se refieren a la amplitud de los horizontes de planificación considerados en los ejercicios de inmunización y a la estructura de las carteras simuladas.

En relación con la amplitud de los horizontes de planificación, *H*, el cuadro muestra cómo éstos no suelen ser inferiores a cinco años. Si bien este hecho puede justificarse por el plazo medio y largo para el que se plantea, en la práctica, la inmunización de carteras, también es cierto que la consideración de períodos amplios tiende a incorporar en los resultados un sesgo favorable a los modelos de duración más sencillos, de carácter unifactorial.

La eficacia creciente de los modelos de duración unifactoriales con la amplitud del horizonte planificador ha sido puesta de manifiesto, entre otros, por Fisher y Weil (1971), Bierwag, Kaufman y Toevs (1982) y Fooladi y Roberts (1992). Este hecho se atribuye al alto nivel de volatilidad que presentan los tipos a corto y que impide que un modelo de un sólo factor sea capaz de reflejar con suficiente grado de precisión el desplazamiento de la totalidad de ETTI y, en particular, el tramo corto de la curva. Obviamente, cuanto mayor es el horizonte de planificación, menor es el peso en la cartera de los flujos con vencimiento a corto plazo, de forma que la infraespecificación del desplazamiento del tramo corto de la curva mediante un modelo de un solo factor acorde a algún concepto de duración unifactorial no mermará considerablemente los resultados de las carteras así inmunizadas.

Junto al anterior, creemos que pueden ofrecerse dos argumentos adicionales para explicar el buen comportamiento de los modelos de duración unifactoriales en horizontes largos. Por una parte, pudiera suceder que, para un período amplio de tiempo, los cambios en el perfil de la curva de tipos, al menos parcialmente, se vieran compensados entre sí, de forma que las medidas de duración más simples podrían ofrecer una eficaz inmunización. Una segunda explicación vendría dada por las características de la estrategia de vencimiento con un solo bono con cupones periódicos en horizontes cortos. Mientras que esta estrategia es difícil de superar en horizontes cortos por los modelos de duración, no sólo de carácter unifactorial sino también multifactorial, sucede lo contrario cuando los horizontes son amplios. En efecto, un solo bono con vencimiento al final del horizonte planificador simulará la sensibilidad de un bono cupón cero con vencimiento también entonces en mayor medida cuanto menor sea el vencimiento de ambos o, lo que es equivalente en la estrategia de inmunización, cuanto menos amplio sea el horizonte planificador. Por esta razón, el grado de exposición al riesgo de interés de la estrategia de vencimiento con un solo bono para horizontes cortos puede ser considerablemente reducido. Si, por otra parte, a este hecho unimos la ventaja con que cuenta la estrategia de vencimiento derivada de la ausencia de reestructuraciones[18], resulta fácilmente comprensible que ésta sea una alternativa difícil de superar por los modelos de duración en programas de inmunización de horizonte reducido.

El segundo punto de coincidencia en la investigación empírica, la estructura de las carteras de inmunización simuladas, fue analizado por Fooladi y Roberts (1992) y, posteriormente, por Bierwag, Fooladi y Roberts (1993) y Soto (2001). En dichos trabajos se pone de manifiesto que muchos de los tests de inmunización llevados a cabo con un resultado muy favorable para las medidas de duración unifactoriales más simples coincidían en la inclusión en las carteras simuladas de un activo con vencimiento cercano al fin del horizonte planificador[19]. Este hecho se traduce en que una parte importante de los flujos de caja de las carteras se sitúan al final del horizonte y, por consiguiente, provoca que las carteras inmunizadas, incluso con medidas de duración muy simples, simulen en gran medida el comportamiento de un bono cupón cero con vencimiento al final del horizonte planificador.

Los favorables resultados alcanzados por Chambers, Carleton y McEnally (1988) para el modelo de duraciones polinomiales tampoco se encuentran exentos de matización debido, nuevamente, a la estructura de las carteras simuladas. En efecto, con el objeto de contar con una sola cartera en la simulación de cada estrategia para cada período, en el trabajo se opta por la elección de aquélla que, verificando las restricciones particulares que definen cada estrategia y admitiendo la adopción de posiciones en corto, presenta la máxima dispersión entre los activos disponibles como vía para minimizar el riesgo no sistemático de la posición. Este criterio no resulta inocuo a efectos de los resultados que se obtienen para las diferentes estrategias que simulan, pues penaliza las carteras inmunizadas mediante un vector de duraciones de menor dimensión. Ello se debe a que el criterio provoca que las carteras se integren por activos de vencimiento diverso, o tipo *ladder*, en mayor medida cuanto menor es el número de restricciones que se incorporen.

Avanzando un paso en la investigación en torno a la influencia de la estructura de cartera, Bierwag y Fooladi y Roberts (1993) compararon el grado de inmunización que conseguían las carteras inmunizadas con la duración tradicional que incluían un activo con vencimiento al final del horizonte de planificación con la que conseguían las carteras inmunizadas mediante el mismo concepto de duración pero que minimizaban, en un caso, y anulaban, en otro, la medida del riesgo de inmunización de Fong y Vasicek (1983, 1984). De esta comparación infirieron que "la inclusión de dicho activo añade más al funcionamiento de la cobertura que el control de M^2" (pág. 1.163). En la misma línea, Soto (2001) analiza desde la óptica del modelo polinomial y para el mercado español de deuda el número de restricciones que han de imponerse sobre las carteras que incluyen, en un caso, y excluyen, en otro, el bono con vencimiento más cercano al final del horizonte pla-

(18) Nótese que la necesidad de practicar reestructuraciones en las carteras inmunizadas, por un lado, pone de manifiesto la pérdida de la identidad entre duración y horizonte planificador que ha de mantenerse en defensa de *shocks* que acontecen en cualquier momento y, por otro lado, incorpora costes en términos de comisiones y diferenciales de precio comprador/vendedor.

(19) Esta restricción no fue considerada en el trabajo de Ingersoll (1983), lo cual justificaría sus desafortunados resultados.

nificador para lograr la inmunización. Su conclusión no puede ser más clara: mientras que en las primeras puede ser suficiente seguir la estrategia de inmunización tradicional y, así, igualar la duración tradicional a la amplitud del horizonte planificador, en las segundas es necesario inmunizar frente a cambios en el nivel, la pendiente y la curvatura de la ETTI.

Centrándonos ahora en la investigación realizada en el campo de los modelos de duraciones direccionales, cabría destacar los esfuerzos realizados en nuestro país por desarrollar este tipo de modelos, sobre todo en el ámbito de factores observables e inspirándose en el trabajo de Elton, Gruber y Michaely (1990).

Ahora bien, como se muestra en el cuadro 4, de las investigaciones nacionales en el campo de factores observables no se desprende un resultado unánime para el modelo de dos tipos óptimos que, obviamente, ofrece un ajuste de los desplazamientos de la ETTI superior al que se alcanza con el modelo unifactorial. En cualquier caso, cabe destacar que los modelos bifactoriales se caracterizan por recoger en la combinación óptima de tipos uno a corto y otro a medio o largo plazo.

La detección, en estos trabajos, de diferentes combinaciones de tipos óptimos para el modelo bifactorial puede encontrar su justificación en varias cuestiones de relevancia dispar. En efecto, mientras que, por un lado, pudiera deberse al uso de esquemas de ponderación bien diferentes, al número y plazo de los tipos de interés considerados, o a la frecuencia con que se han medido los cambios en la ETTI, por otro lado pudiera dar cuenta de un rasgo más preocupante: la inestabilidad de las relaciones que unen los cambios en los tipos de interés.

Como se comentó anteriormente, la estabilidad de estas relaciones, materializada no sólo en el mantenimiento en el tiempo de la combinación óptima de tipos, sino también de los coeficientes de las expresiones que definen los cambios en cada tipo de interés sobre la base de los cambios de aquéllos, no es una cuestión trivial. Aunque es cierto que el paso del tiempo hará necesario calibrar el modelo con determinada frecuencia, no lo es menos que cuanto menores sean los cambios en el modelo menor será el riesgo de proceso estocástico, menor el impacto sobre los resultados de la cartera de los costes de transacción y, por supuesto, mayor la confianza del gestor en su modelo.

Aunque sería deseable que el examen de la estabilidad de los modelos direccionales para el caso español fuera tan intensiva como la llevada a cabo por Elton, Gruber y Michaely, esta tarea se enfrenta a una seria limitación, y es que se carece de una serie histórica suficientemente amplia de la curva de deuda española, básicamente debido a que nuestro mercado sólo alcanzó unas cotas de desarrollo aceptables hace escasos años. En estas condiciones, tanto la estimación como, en su caso, la contrastación de los modelos en el caso español, ha de realizarse con series de tipos de reducida amplitud en donde la verdadera dinámica de la ETTI pudiera obscurecerse por posibles episodios de carácter coyuntural.

Por ejemplo, la evidencia aportada en Navarro y Nave (1997) da muestras de la existencia de un comportamiento diferencial de la curva de tipos española durante la crisis del SME. Si la muestra utilizada para obtener la combinación óptima de tipos se inicia el 09.1993 en vez de a principios del mismo año, ésta pasa a ser la formada por los tipos a 2 y 5 años, con lo que las variables de estado son dos tipos intermedios en vez de un tipo a corto plazo y otro a medio plazo. Esta

Cuadro 4: Evidencia en torno a los tipos de interés óptimos

	Elton, Gruber y Michaely (1990)	Contreras, Ferrer, Navarro y Nave (1995)	Contreras, Ferrer, Navarro y Nave (1996)	Navarro y Nave (1996)	Navarro y Nave (1997)
Período de estimación	1957-1961 1972-1976	01.1993-12.1994	01.1993-06.1994	07.1993-06 1996	01.1993-12.1994
Períodos de contrastación	1962-1966 1967-1971 1977-1981 1982-1986	–	–	–	12.1994-06.1996
Esquema de ponderaciones	a) Equiponderación tramos anuales b) Importancia de cada tipo en cartera ladder	Pesos de los flujos de los 5 mayores FondTesoros FIM españoles	Equiponderación tramos anuales	Equiponderación tramos anuales	Pesos de los flujos de los 5 mayores FondTesoros FIM españoles
Cambio no anticipado	Mensual	Semanal	Semanal	Mensual	Semanal
Criterios	$\underset{x:z}{Max}\sum_{i=1}^{n} w_i R^2_{i,x:z}\sigma^2_{\Delta\tau_i}$	$\underset{x:z}{Max}\sum_{i=1}^{n} w_i R^2_{i,x:z}\sigma^2_{\Delta\tau_i}$	$\underset{x:z}{Max}\sum_{i=1}^{n} w_i R^2_{i,x:z}\sigma^2_{\Delta\tau_i}$	$\underset{x:z}{Max}\sum_{i=1}^{n} w_i R^2_{i,x:z}\sigma^2_{\Delta\tau_i}$ ó $\underset{x:z}{Max}\,\underset{i}{Min}\,R^2_{i,x:z}$	$\underset{x:z}{Max}\sum_{i=1}^{n} w_i R^2_{i,x:z}\sigma^2_{\Delta\tau_i}$
Tipo óptimo modelo unifactorial	4 años	–	5 años	–	3 años
Tipos óptimos	8 meses y 6 años	2 meses y 3 años	5 meses y 5 años	*1er criterio**: 3 años y 8 años *2º criterio*: 4 meses y 7 años	2 meses y 3 años

Notas: (*) Mientras que en el resto de trabajos las combinaciones de tipos óptimos son similares bajo las dos definiciones del cambio no anticipado en la ETTI que se utilizan (movimiento no implícito de la curva y todo cambio en los tipos al contado), en éste se obtiene la combinación recogida en el cuadro para la primera definición de los cambios y la combinación de los tipos a 16 meses y 8 años para la segunda.

situación se repite, como se observa en el cuadro, en el trabajo de Navarro y Nave (1996) cuando se sigue el criterio de Elton *et al.* para determinar la combinación óptima de tipos, esta vez con un esquema de pesos diferente al considerado en el trabajo de 1997. Sin duda, la extrema volatilidad experimentada por los tipos a corto plazo durante la crisis del sistema de cambios europeo explica que el tramo corto de la ETTI juegue un papel importante en la determinación de la combinación de tipos óptima según el criterio de Elton *et al.* para 1993 y para cualquier período de amplitud reducida que incluya este año.

La estabilidad de las interrelaciones entre los cambios en los tipos de interés es también una característica deseable para otro tipo de modelización multivariante y empírica de la dinámica de la curva de tipos más flexible que la anterior, la basada en el análisis de componentes principales, segundo de los modelos de cambio del que se deriva la obtención de un vector de duraciones direccionales.

La investigación realizada en este ámbito, aplicada a diferentes mercados y períodos, coincide unánimemente en la identificación de tres componentes principales como suficientes para explicar la dinámica de la curva de tipos. Éstos se definen, sobre la base del impacto aproximado que tienen sobre el perfil de la ETTI y ordenándose según su importancia, como un factor de nivel, uno de pendiente y uno de curvatura aunque, como apuntan Litterman y Scheinkman (1991, pág. 57), el componente de pendiente "no se corresponde exactamente con ninguna de las medidas de pendiente comúnmente utilizadas" ya que, de hecho, su perfil es curvo pero, sin embargo, monótono.

Destaca claramente, entre los tres componentes principales, el componente de nivel, que es capaz de explicar más del 70% de la variabilidad de los tipos de interés (cuadro 5). Tan alto dato ofrece una justificación adicional al hecho de que los modelos de duración más simples basados en la consideración, exclusivamente, de un factor de nivel sean tan difíciles de desbancar por la investigación aplicada, máxime cuando, como hemos comentado con anterioridad, se incorporan restricciones sobre la estructura de cartera que potencian la eficacia de la duración tradicional.

4. Conclusiones

En este trabajo se ha llevado a cabo, por primera vez, una extensa revisión del concepto de duración desde sus orígenes hasta algunas de sus más modernas redefiniciones y, por otra parte, se ha analizado la evidencia empírica existente en este campo con una visión crítica.

En lo que se refiere a modelos de duración, la investigación ha discurrido entre dos vías paralelas, el más completo empirismo y el desarrollo de modelos teóricos. En ambos casos, la secuencia de los modelos nos muestra que el enfoque univariante de los primeros años rápidamente dio paso a uno multivariante, capaz de recoger con mayor efectividad el patrón de los cambios en la curva de tipos.

Sin embargo, se daba la paradoja de que la evidencia empírica en materia de inmunización mostraba que los modelos más simples eran suficientemente válidos para este objetivo, todo lo cual sin duda justifica que durante décadas la duración y la convexidad tradicionales hayan gozado de plena aceptación. Como hemos visto, la importancia que revisten los cambios en el nivel de la curva de

Cuadro 5: Porcentaje de variabilidad de la Etti explicada por los tres primeros CP

Trabajos	Mercado de deuda pública	Período	CP de nivel	CP de pendiente	CP de curvatura	Total
Litterman y Scheinkman (1991)	EEUU	1984-1988	88,1	8,4	2,0	98,4
Barber y Copper (1996)	EEUU	1985-1991	80,9	11,8	4,4	97,1
Bliss (1997)	EEUU	1970-1995	80,6	11,6	3,1	95,3
Steeley (1990)	Reino Unido	1985-1987	96,9	2,1	0,7	99,7
Kahn y Gulrajani (1993)	Canadá	1988-1992	89,2	7,8	2,2	99,2
D'Ecclesia y Zenios (1994)	Italia	1988-1992	93,9	5,5	0,4	99,8
Navarro y Nave (1995)	España	1993-1995	72,2	16,5	7,1	95,8

tipos, la gran amplitud de los horizontes de planificación y, sobre todo, la estructura de las carteras simuladas en estas investigaciones han sido elementos que han favorecido al modelo de duración tradicional frente a sus contrincantes.

Lógicamente, buena parte de este fracaso cabe también atribuirse a los propios modelos de duración que se han venido proponiendo. En el caso de los teóricos, la elección *ad-hoc* de las variables de estado y de su dinámica restan efectividad a unos modelos que, además, ven aumentar su grado de complejidad a pasos agigantados conforme crece el número de variables de estado consideradas.

Los planteamientos empíricos de carácter multifactorial, que gozan en términos generales de mayor aceptación que los anteriores, forman un grupo mucho menos homogéneo, lo que nos ha llevado a distinguir entre modelos de duraciones paramétricas (polinomiales y exponenciales), direccionales (de componentes principales y de tipos óptimos) y parciales (de tipos vértices). Al margen de la crítica, procedente del enfoque teórico, de la inconsistencia de estos modelos con el equilibrio de los mercados, los principales problemas a los que se enfrentan varían en función del modelo. Así, los modelos de duraciones polinomiales y parciales han sido acusados de ser excesivamente restrictivos, en la medida que inmunizan ante desplazamientos poco probables de la curva de tipos. Los modelos direccionales, por otra parte, en la medida en que se derivan exclusivamente de la historia de los cambios en la ETTI, se muestran especialmente vulnerables a períodos o situaciones en las que la curva evolucione de una forma inusual. Por último, los de duraciones exponenciales plantean el problema de que requieren la estimación de los parámetros de una ecuación de ajuste de la ETTI que pudiera ser complicada.

Sea como fuere, la historia de los cambios en la ETTI nos muestra que el perfil de los desplazamientos incorpora cambios en el nivel, la pendiente y la curvatura de la estructura de tipos y, por ello, éstos son los factores de riesgo cuyo impacto sobre las carteras se ha de gestionar. El modelo tradicional se centró en el más importante de ellos, el factor de nivel. El modelo direccional de tipos óptimos y los modelos teóricos de dos variables de estado avanzaron un paso más y, por último, en un escalafón más alto se encuentran el resto de modelos multifactoriales expuestos.

La cuestión de si la capacidad de los diferentes modelos para recoger la dinámica de la curva de tipos compensa las limitaciones que presentan es una cuestión aún pendiente de resolver desde un punto de vista empírico ya que, al igual que ha sucedido en muchos de los trabajos en donde se han planteado nuevos modelos de duración, el modelo contrincante a nivel empírico básicamente ha sido el modelo tradicional cuando, como vemos, ésta no es la única comparación relevante. No deja de ser sorprendente que casi una década después de que Langetieg propusiera que "un test algo más robusto sería comparar las estrategias de cartera que enfrentan al 'mejor' modelo de duración contra el 'mejor' modelo de equilibrio" [Langetieg (1983), pág. 38] sigamos sin saber siquiera cuál de los planteamientos ya existentes es el mejor siguiendo cada enfoque. Incluso podemos poner en entredicho la relevancia de la comparativa modelos teóricos *vs.* modelos empíricos si entendemos que los dos enfoques no son rivales desde el mismo momento en que se enfrentan a un mismo reto: comprender la dinámica de los tipos de interés. Todo avance en este terreno nos ha de permitir desvelar algunas de nuestras incógnitas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Babbel, D. (1983): "Duration and the term structure of interest rate volatility". En G. G. Kaufman, G.O. Bierwag, y A. Toevs (ed.): *Innovations in bond portfolio management*, JAI Press, Greenwich.

Balbás, A. y A. Ibáñez (1998): "When can you immunize a bond portfolio?", *Journal of banking and finance*, vol. 22, págs. 1.471-1.595.

Barber, J.R. y M.L. Copper (1996): "Immunization using principal component analysis", *Journal of portfolio management*, verano, págs. 99-105.

Barrett, W., T. Gosnell y A. Heuson (1995): "Yield curve shifts and the selection of immunization strategies", *Journal of fixed income*, septiembre, págs. 53-64.

Bierwag, G.O. (1977): "Immunization, duration, and the term structure of interest rates", *Journal of financial and quantitative analysis*, 12, págs. 725-742.

Bierwag, G.O. y G.G. Kaufman (1977): "Coping with the risk of interest-rate fluctuations: a note", *Journal of business*, vol. 50, 3, págs. 364-370.

Bierwag, G.O., I. Fooladi y G.S. Roberts (1993): "Designing an immunized portfolio: Is M-squared the key?", *Journal of banking and finance*, vol. 17, 6, págs. 1.147-1.170.

Bierwag, G.O., G.G. Kaufman y A.L. Toevs (1982): "Single factor duration models in a discrete general equilibrium framework", *Journal of finance*, vol. 37, 2, págs. 325-338.

Bierwag, G.O., G.G. Kaufman y A.L. Toevs (1983): "Recent developements in bond portfolio immunization strategies". En G. G. Kaufman, G.O. Bierwag, y A. Toevs (ed.): *Innovations in bond portfolio management*, JAI Press, Greenwich.

Bierwag, G.O., G.G. Kaufman, R. Schweitzer, R. y A.L. Toevs (1981): "The art of risk management in bond portfolios", *Journal of portfolio management*, primavera, págs. 27-36.

Bliss, R.R. (1997): "Movements in the term structure of interest rates", *Economic review, FRB of Atlanta*, cuarto trimestre, págs. 16-33.

Boero, G. y C. Torricelli (1996): "A comparative evaluation of alternative models of the term structure of interest rates", *European journal of operational research*, 93, págs. 205-223.

Bradley, S.P. y D.B. Crane (1973): "Management of commercial bank government security portfolios: An optimization approach under uncertainty", *Journal of bank research*, primavera, págs. 18-30.

Brennan, M.J. y E.S. Schwartz (1983): "Duration, bond pricing, and portfolio management". En G. G. Kaufman, G.O. Bierwag, y A. Toevs (ed.): *Innovations in bond portfolio management*, JAI Press, Greenwich.

Chambers, D.R. y W.T. Carleton (1988): "A generalized approach to duration". En A.H. Chen (ed.): *Research in finance*, vol.7, JAI Press, Greenwich.

Chambers, D.R., W.T. Carleton y R.W. McEnally (1988): "Immunizing default-free bond portfolios with a duration vector", *Journal of financial and quantitative analysis*, vol. 23, 1, págs. 89-104.

Chen, L. (1996): *Interest rate dynamics, derivatives pricing, and risk management*, Lecture notes in economics and mathematical systems, vol. 435, Springer.

Cohen, K.J., R.L. Kramer y W.H. Waugh (1966): "Regression yield curves for US. Government securities", *Management science*, vol. 13, 4, págs. 168-175.

Contreras, D., R. Ferrer, E. Navarro y J.M. Nave (1995): "Análisis de la duración a partir de un modelo bifactorial empírico de la estructura temporal de los tipos de interés", *II Jornadas de economía financiera*, vol. 2, Bilbao.

Contreras, D., R. Ferrer, E. Navarro y J.M. Nave (1996): "Análisis factorial de la estructura temporal de los tipos de interés en España", *Revista española de financiación y contabilidad*, vol. 25, 86, págs. 139-160.

Cooper, I.A. (1977): "Asset values, interest-rate changes, and duration", *Journal of financial and quantitative analysis*, vol. 12, diciembre, págs. 701-723.

Cox, J., J.E. Ingersoll y S.A. Ross (1979): "Duration and the measurement of basis risk", *Journal of business*, vol. 52, 1, págs. 51-61.

D'Ecclesia, R.L. y S.A. Zenios (1994): "Risk factor analysis and portfolio immunization in the Italian bond market", *Journal of fixed income*, septiembre, págs. 51-58.

Elton, E.J., M.J. Gruber y R. Michaely (1990): "The structure of spot rates and immunization", *Journal of finance*, vol. 45, 2, págs. 629-642.

Fisher, L. y R.L. Weil (1971): "Coping with the risk of interest-rate fluctuations: Returns to bondholders from naive and optimal strategies", *Journal of business*, 4, págs. 408-431.

Fong, H.G. y O.A. Vasicek (1983): "The tradeoff between return and risk in immunized portfolio", *Financial analysts journal*, septiembre-octubre, págs. 73-78.

Fong, H.G. y O.A. Vasicek (1984): "A risk minimizing strategy for portfolio immunization", *Journal of finance*, vol. 39, 5, págs. 1.541-1.546.

Fooladi, I. y G.S. Roberts (1992): "Bond portfolio immunization: Canadian test", *Journal of economics and business*, vol. 44, 1, págs. 3-17.

Gómez, I. (1999): *Aproximación al riesgo de precio de un activo de renta fija a través de un modelo de duración multifactorial paramétrico*, VII Foro de finanzas, Valencia, 18 págs.

Gómez, I. y A. Novales (1997): "Estrategias de inmunización ante posibles desplazamientos en la estructura temporal", *Análisis financiero internacional*, diciembre-enero, págs. 15-39.

Gómez, I. y A. Novales (1999): *Inmunización de una cartera de renta fija con un modelo de duración multifactorial*, Universidad Complutense de Madrid, Documento de trabajo, 38 págs.

Hicks, J.R. (1939): *Value and capital*, Oxford University Press, Oxford.

Hill, C.F. y S. Vaysman (1998): "An approach to scenario hedging", *Journal of portfolio management*, invierno, págs. 83-92

Ho, T.S.Y. (1992): "Key rate durations: Measures of interest rate risks", *Journal of fixed income*, septiembre, págs. 29-44.

Hull, J.C. (1993): *Options, futures and other derivative securities*, Prentice-Hall International, New Jersey.

Ingersoll, J. (1983): "Is immunization feasible? Evidence from the CRSP data". En G. G. Kaufman, G.O. Bierwag, y A. Toevs (ed.): *Innovations in bond portfolio management*, JAI Press, Greenwich.

Ingersoll, J.E., J. Skelton y R.L. Weil (1978): "Duration forty years later", *Journal of financial and quantitative analysis*, noviembre, págs. 627-652.

Johnson, B.D. y K.R. Meyer (1989): "Managing yield curve risk in an index environment", *Financial analysts journal*, noviembre-diciembre, págs. 51-59.

Kahn, R.N. y D. Gulrajani (1993): "Risk and return in the Canadian bond market", *Journal of portfolio management*, primavera, págs. 86-93.

Kahn, R.N. y R. Lochoff (1990): "Convexity and exceptional return", *Journal of portfolio management*, invierno, págs. 43-47.

Khang, C. (1979): "Bond immunization when short-term rates fluctuate more than long-term rates", *Journal of financial and quantitative analysis*, vol. 13, págs. 1.085-1.090.

Lacey, N.J. y S.K. Nawalkha (1993): "Convexity, risk and returns", *Journal of fixed income*, diciembre, págs. 72-79.

Litterman, R. y J. Scheinkman (1991): "Common factors affecting bond returns", *Journal of fixed income*, junio, págs. 54-61.

Macaulay, F.R. (1938): *Some theorical problems suggested by the movement of interest rates, bond yields, and stock prices in the US since 1856*, NBER, Nueva York.

Moreno, M. (1999): *Risk management under a two-factor model of the term structure of interest rates*, VII Foro de finanzas, Valencia, 37 págs..

Navarro, E. y J.M. Nave (1995): "Análisis de los factores de riesgo en el mercado español de deuda pública", *Cuadernos aragoneses de economía*, vol. 5, 2, págs. 331-341.

Navarro, E. y J.M. Nave (1996): "Un modelo para la evaluación de la gestión de carteras de renta fija", *IV Foro de Finanzas*, vol. 2, Madrid, págs. 1183-1225.

Navarro, E. y J.M. Nave (1997): "A two-factor duration model for interest rate risk management", *Investigaciones económicas*, vol. 21, 1, págs. 55-74.

Nelson, C.R. y A.F. Siegel (1987): "Parsimonious modeling of yield curves", *Journal of business*, vol. 60, 4, págs. 473-489.

Nelson, J. y S.M. Schaefer (1983): "The dynamics of term structure and alternative portfolio immunization strategies". En G. G. Kaufman, G.O. Bierwag, y A. Toevs (ed.): *Innovations in bond portfolio management*, JAI Press, Greenwich.

Prisman, E.Z. y M.R. Shores (1988): "Duration measures for specific term structure estimations and applications to bond portfolio immunization", *Journal of banking and finance*, vol. 12, 3, págs. 493-504.

Redington, F.M. (1952): "Review of the principle of life office valuations", *Journal of the Institute of Actuaries*, 18, págs. 286-340.

Reitano, R.R. (1990): "Non-parallel yield curve shifts and duration leverage", *Journal of portfolio management*, verano, págs. 62-67.

Reitano, R.R. (1992): "Non-parallel yield curve shifts and immunization", *Journal of portfolio management*, primavera, págs. 36-43.

Reitano, R.R. (1993): "Multivariate stochastic immunization theory", *Transactions of the Society of Actuaries*, vol. 45, págs. 425-484.

Reitano, R.R. (1996): "Non-parallel yield curve shifts and stochastic immunization", *Journal of portfolio management*, invierno, págs. 71-78.

Samuelson, P.A. (1945): "The effect of interest rates increases on the banking system", *American economic review*, marzo, págs. 16-27.

Soto, G.M. (2001): "Immunization derived from a polynomial duration vector in the Spanish bond market", *Journal of banking and finance*, forthcoming.

Steeley, J.M. (1990): "Modelling the dynamics of the term structure of interest rates", *Economic and social review*, vol. 21, 4, págs. 337-361.

Willner, R. (1996): "A new tool for portfolio managers: level, slope and curvature durations", *Journal of fixed income*, junio, págs. 48-59.

Fecha de recepción del original: abril, 1999
Versión final: enero, 2001

ABSTRACT

In this paper we show the multitude of models that are involved in duration analysis and their implications in the immunization of fixed income portfolios. To that end, we explain first the immunization technique and the traditional duration model and its limitations. We then examine several duration models that have been proposed over the last twenty years. Finally, we review the most relevant empirical evidence in this field from a critical point of view. Such an approach is justified given the use of portfolio constraints that favor certain models in empirical research, together with unsolved issues.

Key words: immunization, duration, interest rate, risk management, fixed income.

JEL classification: E43, G11.